



Andreia Filipa Cardoso Bártolo

Licenciada em Matemática

Sistemas de *Bonus Malus*: Simulação de uma Carteira Aberta

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

Matemática e Aplicações

Ramo de Atuariado, Estatística e Investigação Operacional

Orientadoras: Gracinda Rita Diogo Guerreiro,
Professora Auxiliar, Universidade Nova de Lisboa
Maria Isabel Azevedo Rodrigues Gomes,
Professora Auxiliar, Universidade Nova de Lisboa

Júri

Presidente: Manuel Leote Tavares Inglês Esquível
Arguente: Maria de Lourdes Belchior Afonso
Vogal: Gracinda Rita Diogo Guerreiro



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Setembro, 2016

Sistemas de *Bonus Malus*: Simulação de uma Carteira Aberta

Copyright © Andreia Filipa Cardoso Bártolo, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

A quem sempre acreditou em mim.

AGRADECIMENTOS

“Ninguém escapa ao sonho de voar,
de ultrapassar os limites do espaço onde nasceu,
de ver novos lugares e novas gentes.
Mas saber ver em cada coisa, em cada pessoa,
aquele algo que a define como especial,
um objeto singular, um amigo, é fundamental.
Navegar é preciso, reconhecer o valor das coisas e das pessoas,
é mais preciso ainda.”

Antoine de Saint-Exupéry

Chegando ao fim mais uma etapa da minha vida gostaria de agradecer a algumas pessoas que foram essenciais durante a realização desta dissertação.

Em primeiro lugar gostaria de agradecer às minhas orientadoras,

- Professora Gracinda Rita Guerreiro pelo carinho, compreensão e ajuda demonstrados numa fase difícil desta etapa e pela orientação e disponibilidade ao longo desta dissertação.
- Professora Isabel Gomes pela constante motivação, pelas novas ideias que me permitiram enriquecer muito esta dissertação e pela orientação e disponibilidade ao longo da mesma.

Em segundo lugar gostaria de agradecer à minha mãe pelo apoio, motivação e por estar sempre presente em todas as etapas.

Gostaria de agradecer também a duas pessoas que, embora de formas diferentes, contribuíram muito para a realização deste projeto:

- À Sandra Loureiro por, mesmo estando longe, ter sido incansável, sempre pronta a ajudar e se revelar uma amiga para todas as horas.

-
- À Elsa Pinguinhas pelas palavras amigas, incentivos e por me ouvir sempre.

Aos professores do Mestrado em Matemática e Aplicações - Ramo Atuariado, Estatística e Investigação Operacional um agradecimento por todos os conhecimentos transmitidos ao longo destes dois anos que certamente serão úteis não só para esta etapa mas para as que virão.

Aos meus colegas de mestrado, Pedro Coelho, Natacha Amaro, Mariana Baptista e Pedro Varanda, um agradecimento por todo o companheirismo e apoio.

Por último mas não menos importante, um agradecimento à minha família que me acompanhou durante toda a minha vida de estudante por todo o apoio e compreensão.

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo o estudo de um Sistema de *Bonus Malus* sob a perspectiva de uma carteira aberta. Neste estudo pretende evidenciar-se algumas vantagens da utilização de técnicas de Simulação para a obtenção de resultados importantes para a modelação de Sistemas de *Bonus Malus*. Os resultados obtidos através de técnicas de Simulação serão comparados com os que se obteriam à luz da Teoria dos Vórtices Estocásticos, descrita, por exemplo, em Guerreiro et al. (2014).

Os resultados obtidos através da Teoria dos Vórtices Estocásticos e através da Simulação são semelhantes, o que leva a concluir que a Simulação consegue reproduzir a Teoria dos Vórtices Estocásticos. Esta dissertação permitiu encontrar muitas vantagens da utilização da Simulação. Permite, por exemplo, encontrar de forma simples Intervalos de Confiança e relaxar algumas das hipóteses consideradas na Teoria dos Vórtices Estocásticos representando a realidade e a volatilidade de uma carteira de seguro automóvel.

Palavras-chave: Sistemas de *Bonus Malus*, Carteira Aberta, Simulação, Vórtices Estocásticos, Quota de Mercado, Escalas Ótimas

ABSTRACT

The aim of this dissertation is the study of a System *Bonus Malus* under the perspective of an open portfolio. This study is intended to evidence some advantages of using Simulation techniques to obtain significant Systems Bonus Malus results. The results obtained using Simulation techniques will be compared with the one's that would be obtained using Stochastic Vortices Theory described in Guerreiro et al. (2014).

The obtained results from Simulation and Stochastic Vortices Theory are similar, which leads to the conclusion that the Simulation can reproduce the Stochastic Vortices Theory. This dissertation allowed to find many advantages of using Simulation, such as easily find Confidence Intervals and relax some hypothesis considered in Stochastic Vortices Theory, representing the reality and volatility of an automobile insurance portfolio.

Keywords: *Bonus Malus* Systems, Open Portfolio, Simulation, Stochastic Vortices, Market Share, Optimal Bonus Scales

ÍNDICE

Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas	xvii
Lista de Símbolos	xix
Siglas	xxi
1 Introdução	1
2 Sistemas de Bonus Malus	5
2.1 Tarificação <i>a priori</i> e Tarificação <i>a posteriori</i>	5
2.2 O que é um Sistema de Bonus Malus?	6
2.3 Uma abordagem para o Sistema de <i>Bonus Malus</i>	7
2.3.1 Os Vórtices Estocásticos	8
2.3.2 Matrizes de Probabilidades de Transição	8
2.3.3 O Número de Sinistros - O Processo de Poisson Misto	9
2.3.4 As Entradas no Sistema - Modelo Assimptótico	11
2.3.5 Estimadores de Máxima Verosimilhança para o Modelo Assimptótico	11
2.3.6 A Distribuição Limite	12
2.3.7 A Evolução do Prémio Médio	13
2.3.8 As Escalas Ótimas de Prémios	14
3 Simulação	21
3.1 O que é a Simulação?	21
3.2 O Modelo de Simulação	22
4 A Simulação e os Sistemas de Bonus Malus	25
4.1 Caso de Estudo: As Características da Seguradora	25
4.1.1 Características do <i>Sistema de Bonus Malus</i>	25
4.1.2 Classes do <i>Sistema de Bonus Malus</i>	25
4.1.3 Vetor dos Prémios	26
4.1.4 Matriz de Regras de Transição	26
4.1.5 O Número de Sinistros	27

4.1.6	As Probabilidades de Alocação	29
4.1.7	As Probabilidades de Anulação	30
4.1.8	As Entradas no Sistema	30
4.2	A Teoria dos Vórtices Estocásticos - Resultados	31
4.2.1	A Distribuição Limite	31
4.2.2	A Evolução da Percentagem de Apólices	34
4.2.3	A Evolução do Prémio Médio	35
4.2.4	A Evolução do Prémio Total	36
4.2.5	As Escalas Ótimas de Prémios	37
4.3	O Modelo de Simulação - Validação	44
4.3.1	A Distribuição Limite	44
4.3.2	A Evolução da Percentagem de Apólices	45
4.3.3	A Evolução do Prémio Médio	45
4.3.4	A Evolução do Prémio Total	46
4.3.5	As Escalas Ótimas de Prémios	47
4.4	O Modelo de Simulação - Estudo de Novos Cenários	49
4.4.1	O Modelo de Simulação sem Recurso à Discretização	49
4.4.2	O Modelo de Simulação com Entradas Geométrica	59
4.5	Considerações Finais	67
4.5.1	O Modelo de Simulação (com e sem discretização)	67
4.5.2	O Modelo de Simulação com Entradas Geométricas	67
5	Conclusão	69
	Bibliografia	71
A	Discretização da Distribuição de Estrutura	73
B	Resultados do modelo de Simulação (com discretização)	75
B.1	Distribuição Limite da Carteira	75
C	Resultados do modelo de Simulação (sem discretização)	77
C.1	Distribuição Limite da Carteira	77
C.2	Escala de Norberg	79
C.3	Escala de Borgan, Hoem e Norberg	80
C.4	Escala de Gilde	82
C.5	Escala de Andrade e Silva	83
D	Amplitudes para a Evolução do Prémio Total	85
E	Amplitudes obtidas - Modelo de Entradas com Distribuição Geométrica	87

LISTA DE FIGURAS

3.1	Modelo de Simulação	24
4.1	Representação da Cadeia de Markov	27
4.2	Número de novas apólices no sistema por ano	31
4.3	Função Densidade de Probabilidade da Distribuição Gama	32
4.4	Distribuição limite obtida - modelo de Vórtices Estocásticos - Sem Classe 1	33
4.5	Evolução da percentagem de apólices - Classe 1, 5, 10 e 15	34
4.6	Evolução do Prémio Médio ao longo de 50 anos, em percentagem do Prémio Puro	35
4.7	Evolução do Prémio Total ao longo de 50 anos	36
4.8	Escala de Norberg - Resultados	38
4.9	Comparação entre as Distribuições Limite e Ponderada	39
4.10	Escala de Borgan - Resultados	40
4.11	Escala de Gilde - Resultados	42
4.12	Escala de Andrade e Silva - Resultados	43
4.13	Comparação das Escalas de Prémios	43
4.14	Comparação entre as distribuições limite obtidas - SBM e Simulação	44
4.15	Evolução da percentagem de apólices - Classe 1, 5, 10 e 15 - Vórtices Estocásticos vs Simulação (com discretização)	45
4.16	Evolução do Prémio Médio ao longo de 50 anos, em percentagem do Prémio Puro - Vórtices Estocásticos vs Simulação (com discretização)	46
4.17	Evolução do Prémio Total ao longo de 50 anos - Vórtices Estocásticos vs Simulação (com discretização)	46
4.18	Comparação entre as diferentes escalas - Vórtices Estocásticos vs Simulação (com discretização)	48
4.19	Comparação das Escalas de Prémios obtidas através do modelo de Simulação	49
4.20	Comparação entre as Distribuições Limites obtidas - SBM e Simulação (sem discretização)	50
4.21	Comparação entre as Amplitudes obtidas para cada classe	50
4.22	Evolução da percentagem de apólices - Classe 1, 5, 10 e 15 - Vórtices Estocásticos vs Simulação (sem discretização)	51

4.23	Evolução do Prémio Médio ao longo de 50 anos, em percentagem do Prémio Puro - Vórtices Estocásticos vs Simulação (sem discretização)	52
4.24	Evolução do Prémio Total ao longo de 50 anos - Vórtices Estocásticos vs Simulação (sem discretização)	53
4.25	Comparação entre as Amplitudes obtidas para cada ano	53
4.26	Escala de Norberg - Vórtices Estocásticos vs Simulação (sem discretização) . .	54
4.27	Amplitude dos resultados obtidos para a Escala de Norberg	55
4.28	Escala de Borgan - Vórtices Estocásticos vs Simulação (sem discretização) . .	55
4.29	Amplitude dos resultados obtidos para a Escala de Borgan	56
4.30	Escala de Gilde - Vórtices Estocásticos vs Simulação (sem discretização) . . .	56
4.31	Amplitude dos resultados obtidos para a Escala de Gilde	57
4.32	Escala de Andrade e Silva - Vórtices Estocásticos vs Simulação (sem discretização)	57
4.33	Amplitude dos resultados obtidos para a Escala de Andrade e Silva	58
4.34	Comparação das Escalas de Prémios - modelo de Simulação (sem discretização)	58
4.35	Número de segurados no mercado Segurador por ano	60
4.36	Quota de Mercado por ano - Cenário Positivo	61
4.37	Quota de Mercado por ano - Cenário Moderado	61
4.38	Quota de Mercado por ano - Cenário Negativo	62
4.39	Comparação entre as Distribuições Limites obtidas - Poisson e Geométrica .	62
4.40	Evolução da percentagem de apólices - Classe 1, 5, 10 e 15 - Poisson e Geométrica - Cenário Positivo	63
4.41	Evolução da percentagem de apólices - Classe 1, 5, 10 e 15 - Poisson e Geométrica - Cenário Moderado	64
4.42	Evolução da percentagem de apólices - Classe 1, 5, 10 e 15 - Poisson e Geométrica - Cenário Negativo	64
4.43	Evolução do Prémio Médio - Poisson e Geométrica	65
4.44	Evolução do Prémio Total - Poisson e Geométrica	66
E.1	Amplitude dos resultados obtidos para a Distribuição Limite	87
E.2	Intervalos de Confiança para o Prémio Total ao longo de 50 anos	88
E.3	Intervalos de Confiança para a Escala Ótima de Prémios de Norberg	89
E.4	Amplitude dos resultados obtidos para a Escala Ótima de Prémios de Borgan, Hoem e Norberg	90
E.5	Amplitude dos resultados obtidos para a Escala Ótima de Prémios de Gilde e Sundt	91
E.6	Amplitude dos resultados obtidos para a Escala Ótima de Prémios de Andrade e Silva	92

LISTA DE TABELAS

2.1	Exemplos de Variáveis de Classificação utilizadas no Ramo Automóvel	5
2.2	Exemplos de características que não são facilmente observáveis	5
3.1	Vantagens e desvantagens da utilização de um Modelo de Simulação vs Modelo Analítico	21
3.2	Resultados dos testes de ajustamento	23
4.1	Classes do Sistema de <i>Bonus Malus</i> (SBM)	26
4.2	Distribuição observada do número de sinistros - Ano 2006	27
4.3	Distribuição observada do número de sinistros - Ano 2006	28
4.4	Número de sinistros observados e ajustados - Modelo de Poisson	28
4.5	Número de Sinistros Observados e Ajustados - Distribuição Poisson-Gama .	29
4.6	Resultados dos testes de ajustamento	29
4.7	Probabilidades de Alocação às classes do Sistema	29
4.8	Probabilidades de Anulação	30
4.9	Número de Novas Apólices (1997 a 2007)	30
4.10	Distribuição Limite da Carteira - Teoria dos Vórtices Estocásticos	33
4.11	Escala Ótima de Norberg - Teoria dos Vórtices Estocásticos	37
4.12	Distribuição Ponderada - Teoria dos Vórtices Estocásticos	38
4.13	Escala Ótima de Borgan et al. - Teoria dos Vórtices Estocásticos	40
4.14	Escala Ótima de Gilde e Sundt - Teoria dos Vórtices Estocásticos	41
4.15	Escala Ótima de Andrade e Silva - Teoria dos Vórtices Estocásticos	42
4.16	Escala Ótima de Norberg - modelo de Simulação (com discretização)	47
4.17	Número Total de Apólices (1997 a 2015) - Fonte: Estimativa elaborada pelo autor	59
4.18	Quota de Mercado da Seguradora (1997 a 2015)	60
A.1	Discretização da Distribuição de Estrutura	73
B.1	Distribuição Limite da Carteira - modelo de Simulação (com discretização) .	75
C.1	Distribuição Limite da Carteira - modelo de Simulação (sem discretização) .	77
C.2	Amplitude dos resultados obtidos para a Distribuição Limite da Carteira - modelo de Simulação	78

C.3	Escala Ótima de Norberg - modelo de Simulação (sem discretização)	79
C.4	Amplitude dos resultados obtidos para a Escala de Norberg - Simulação . . .	79
C.5	Escala Ótima de Borgan et al. - modelo de Simulação (sem discretização) . .	80
C.6	Amplitude dos resultados obtidos para a Escala de Borgan et al. - Simulação	81
C.7	Escala Ótima de Gilde e Sundt - modelo de Simulação (sem discretização) . .	82
C.8	Amplitude dos resultados obtidos para a Escala de Gilde e Sundt - Simulação	82
C.9	Escala Ótima de Andrade e Silva - modelo de Simulação (sem discretização)	83
C.10	Amplitude dos resultados obtidos para a Escala de Andrade e Silva - Simulação	84
D.1	Amplitudes obtidas para a Evolução do Prémio Total - Simulação	85

LISTA DE SÍMBOLOS

T Matriz das Regras de Transição .

α Parâmetro de forma de uma distribuição Gama(α, β) .

β Parâmetro de escala de uma distribuição Gama(α, β) .

Λ Variável de estrutura de um processo de Poisson Misto .

\sim Com distribuição.

$\Gamma(\alpha)$ Função Gama .

π_T Distribuição limite incondicional .

$\pi_{T,\lambda}$ Distribuição limite .

$P(\lambda)$ Distribuição Poisson com parâmetro λ .

$U(\lambda)$ Distribuição de estrutura de um processo de Poisson Misto.

$U_{[0,1]}$ Distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$.

$Z_{S,n}$ Classe do Sistema em que uma determinada apólice se encontra no período n .

i_0 Classe de entrada do SBM .

l Função de log-verossimilhança .

s Número de Classes do Sistema .

t_{ij} Transição da Classe i para a Classe j num passo .

u_λ^d Vetor das probabilidades da distribuição $U(\lambda)$ discretizada .

w_k Ponderador do ano k para a distribuição ponderada.

b Escala de Prémios .

N Variável aleatória que representa o número de sinistros total da carteira .

PP Prémio Puro .

SIGLAS

EMV Estimador de Máxima Verosimilhança.

SBM Sistema de *Bonus Malus*.

u.m. unidade monetária.

INTRODUÇÃO

Com o aumento da circulação automóvel, e consequente elevado número de apólices de seguro automóvel, existe uma maior rotatividade dos segurados em busca de melhores prémios. Esse crescimento da rotatividade deve-se também a alterações no mercado segurador como, por exemplo, a facilidade de contratação/anulação de apólices e ao surgimento de plataformas online que facilitam todo este processo.

No ano em que uma apólice entra em vigor esta é inserida numa classe tarifária onde se reúnem segurados com características semelhantes. Nesse ano é-lhe cobrado um prémio, designado como prémio *a priori*, baseado em algumas características possíveis de serem observadas tais como a idade, anos de carta e zona de residência do segurado.

Existem, no entanto, algumas características que não são observáveis no momento em que uma apólice dá entrada como a destreza ao volante, a agressividade na condução, a rapidez de reflexos ou o conhecimento do código da estrada. Desta forma, nem sempre os segurados colocados numa mesma classe tarifária representam o mesmo risco para a seguradora e torna-se necessário, em anuidades futuras, a correção do prémio cobrado, tendo em conta a sinistralidade passada, utilizando para isso mecanismos de tarifação *a posteriori*.

Os Sistemas de *Bonus Malus* (SBM) são um mecanismo de tarifação *a posteriori*, utilizado apenas nos seguros automóveis, que visa corrigir o prémio de um segurado, reduzindo-o em caso de baixa sinistralidade e aumentando-o em caso de sinistralidade elevada. Desta forma, a longo prazo, cada segurado paga um prémio correspondente à sua frequência de sinistralidade.

Um SBM caracteriza-se por um vetor de prémios a cobrar em cada classe tarifária, uma classe de entrada onde se considera que são colocadas todas as novas apólices e por um conjunto de regras de transição que ditam a classe tarifária onde um segurado será colocado na anuidade seguinte com base nos sinistros declarados à Seguradora na

anuidade anterior.

Ao não considerar a entrada e saída de segurados e definir uma classe de entrada fixa, os modelos tradicionais para SBM podem revelar-se pouco realistas em alguns mercados onde a rotatividade possa ser elevada. De forma, a ultrapassar estas limitações, Guerreiro (2001) e Guerreiro e Mexia (2004) sugeriram uma nova abordagem para a modelação de SBM, baseada na Teoria dos Vórtices Estocásticos. Em Guerreiro e Mexia (2008), Guerreiro et al. (2010), Guerreiro et al. (2012) e Guerreiro et al. (2014) é possível encontrar versões mais recentes desta abordagem, considerada mais realista, uma vez que todos os anos entram novos segurados para as Seguradoras e também, por diversos motivos, muitos anulam a sua apólice.

Outros autores também se focaram nas limitações dos modelos tradicionais para SBM, como é o caso de Centeno e Andrade e Silva (2001).

Esta dissertação tem como objetivo o estudo de um SBM sob a perspetiva de uma carteira aberta. Neste estudo pretende evidenciar-se algumas vantagens da utilização de técnicas de Simulação para a obtenção de resultados importantes para a modelação de Sistemas de Bonus Malus. Os resultados obtidos através de técnicas de Simulação foram comparados com os que se obteriam à luz da Teoria dos Vórtices Estocásticos, descrita, por exemplo, em Guerreiro et al. (2014).

Foram determinadas as escalas ótimas de prémios de Norberg (1976), Borgan et al. (1981), Gilde e Sundt (1989) e Andrade e Silva (1991) para os modelos considerados, de modo a proceder à sua comparação e análise.

Por fim, foi testada uma distribuição diferente para o número de segurados a entrar para o sistema em cada ano i , com a finalidade de estudar o impacto que uma alteração no modelo de entradas pode causar no sistema. Para isso, efetuou-se uma simulação desta nova carteira de seguro automóvel e comparou-se com os resultados obtidos anteriormente utilizando a Teoria dos Vórtices Estocásticos.

Esta dissertação encontra-se dividida em cinco capítulos:

- No Capítulo 2 faz-se uma introdução aos SBM e à Teoria dos Vórtices Estocásticos e apresenta-se quatro escalas ótimas de prémios, conforme referido anteriormente. São apresentados alguns modelos que possam ser adequados para a distribuição do número de sinistros, com vista a encontrar uma distribuição de probabilidade que seja representativa da sinistralidade observada na carteira de responsabilidade civil automóvel da Seguradora utilizada, que permitirá estimar as probabilidades de transição entre classes do SBM.
- O Capítulo 3 aborda conceitos relacionados com a Simulação, utilizados para replicar a realidade de uma carteira de Seguro de Responsabilidade Civil Automóvel.
- No último capítulo são aplicados os conceitos apresentados aos dados de uma Seguradora Portuguesa e são apresentados alguns comentários e conclusões.

Concluir que a Simulação consegue reproduzir a realidade permite estudar, de forma simples, vários cenários que se desejem analisar e prever a situação em que a Seguradora se encontrará num futuro próximo ou longínquo, sob reserva dos pressupostos do modelo de simulação se manterem adequados.

Todos os resultados referentes a Simulações foram obtidos recorrendo à programação em Java.

SISTEMAS DE BONUS MALUS

2.1 Tarificação *a priori* e Tarificação *a posteriori*

Na construção de uma estrutura tarifária é necessário identificar as causas que influenciam o risco. No caso da estrutura tarifária do Ramo Automóvel é usual utilizar-se diversas variáveis de classificação para agrupar riscos semelhantes em diversos grupos de tarificação. Alguns exemplos dessas variáveis podem ser visualizados na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Exemplos de Variáveis de Classificação utilizadas no Ramo Automóvel

Veículo	Segurado
• Cilindrada do Veículo	• Idade do Segurado
• Potência do Veículo	• Anos de Carta do Segurado
• Ano de Registo do Veículo	• Zona de Residência
• Tipo de Combustível	• Sexo do Segurado
• Número de Lugares do Veículo	• Pessoal/Coletivo

A intenção da Seguradora ao agrupar riscos semelhantes que paguem prémios idênticos, não é completamente satisfeita uma vez que existem outras características, algumas não observáveis, que são importantes na quantificação do risco. Exemplos dessas características podem ser visualizados na Tabela 2.2.

Tabela 2.2: Exemplos de características que não são facilmente observáveis

Características não observáveis
• Destreza ao volante
• Agressividade na condução
• Rapidez de reflexos
• Conhecimento do código da estrada

Estas características não são observáveis aquando da criação da apólice e, por isso, o prémio cobrado pode não representar o verdadeiro risco que o segurado representa para a Seguradora. Torna-se necessário, em anuidades futuras, proceder à correção deste prémio tendo em conta a sinistralidade passada, utilizando para isso mecanismos de tarifação *a posteriori*. Estes mecanismos são importantes tanto para a Seguradora como para o segurado visto que o segurado pretende pagar um prémio justo consoante o risco que representa para a Seguradora e esta pretende ser devidamente remunerada por assumir a cobertura de determinado risco.

2.2 O que é um Sistema de Bonus Malus?

Os SBM são mecanismos de tarifação *a posteriori* que funcionam da seguinte forma: em caso de baixa sinistralidade o segurado vê o seu prémio reduzido enquanto o verás ser agravado, caso contrário. Os segurados, de forma a evitarem um agravamento do seu prémio, tendem a conduzir de forma mais prudente, o que leva a uma redução do número de sinistros e dos custos associados aos mesmos. Com este mecanismo, a longo prazo, cada segurado paga um prémio correspondente à sua frequência de sinistralidade.

As Seguradoras Portuguesas, e a grande generalidade das Seguradoras Europeias, apenas têm em conta o número de sinistros participados na última anuidade na aplicação dos SBM, não tendo em conta a gravidade dos mesmos, ou seja, um segurado que apenas deu um sinistro mas de custo elevado, pode ser menos penalizado que um segurado que deu mais sinistros mas de menor custo associado.

Um SBM tem as seguintes características:

- Todas as apólices têm a mesma duração, geralmente um ano;
- O sistema encontra-se dividido em s classes onde estão distribuídas as apólices em vigor;
- A classe para onde um segurado transita na anuidade seguinte depende apenas:
 - Da classe onde se encontrava na anuidade anterior;
 - Do número de sinistros declarados à Seguradora na última anuidade.

Para caracterizar um SBM com s classes basta conhecer os seguintes elementos:

- A escala de prémios $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_s)$ onde b_i representa a percentagem do prémio puro a pagar pelos segurados que se encontram na classe i , $i = 1, 2, \dots, s$;
- A classe de entrada i_0 que, como o nome indica, é a classe onde, se considera que, todos os novos segurados são colocados;

- As regras de transição do sistema, \mathbf{T} , que, após conhecido o número de sinistros reportados no período anterior, ditam a classe para a qual um segurado transita no início do período seguinte.

As regras de transição devem ser claras e completas e podem ser representadas através de uma matriz

$$\mathbf{T} = [T_{ij}]_{s \times s}$$

onde para cada par ordenado (i, j) , T_{ij} é o conjunto dos números inteiros r tais que uma apólice transita da classe i para a classe j no fim do período se reportar r sinistros nesse período.

Para que um conjunto de regras de transição seja completo, \mathbf{T} deve ser tal que:

- $\bigcup_{j=1}^s T_{ij} = \mathbb{N}_0$;
- $T_{ij} \cap T_{ij'} = \emptyset, \quad \forall j \neq j', \quad i, j \in \{1, 2, \dots, s\}.$

Outra forma de definir as regras de transição é através de transformações $t_{ij}(k)$, $i, j = 1, 2, \dots, s$, $k \in \mathbb{N}_0$ onde:

$$t_{ij}(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ sinistros originam a transição da classe } i \text{ para a classe } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.1)$$

Ao definir as regras de transição através de transformações $t_{ij}(k)$ deve-se garantir que para cada par (i, k) existe um e um só j tal que $t_{ij}(k) = 1$ pois se tal não acontecesse não seria claro para que classe o segurado transitaria no período seguinte.

2.3 Uma abordagem para o Sistema de *Bonus Malus*

O modelo proposto para SBM apresentado na secção 2.2 não considera entradas nem saídas de segurados da carteira e considera que inicialmente todos os segurados se encontram na classe de entrada.

Na realidade todos sabemos que muitos segurados abandonam a sua Seguradora por diversas razões como melhores condições oferecidas por outras Seguradoras, descontentamento com os serviços prestados pela Seguradora atual ou promoções efetuadas por outras Seguradoras e que, com o aumento da circulação automóvel, todos os anos entram novos segurados para a carteira. Considerar que a classe de entrada é a mesma para todos os novos segurados também não é muito realista uma vez que a Seguradora tem acesso ao Certificado de Tarificação onde pode adequar a classe de entrada ao número de sinistros reportados à Seguradora anterior.

Desta forma, o modelo de SBM apresentado anteriormente pode não ser o mais adequado de um ponto de vista prático tendo sido proposta em Guerreiro (2001) uma teoria

alternativa, a Teoria dos Vórtices Estocásticos. Como referido anteriormente, outros autores também se focaram nas limitações dos modelos tradicionais para SBM, como é o caso de Centeno e Andrade e Silva (2001).

2.3.1 Os Vórtices Estocásticos

Considere-se, daqui por diante, que uma população aberta é uma população para a qual se admite entradas e saídas. Segundo Guerreiro et al. (2014), se se considerar uma população aberta dividida num número finito de sub-populações, estamos perante um vórtice estocástico se a proporção de indivíduos em cada sub-população estabilizar a longo prazo, apesar das entradas, transições e saídas.

Uma vez que nesta dissertação serão aplicados conhecimentos teóricos de SBM e de Simulação a uma carteira de Seguro Automóvel de uma Seguradora Portuguesa, a carteira de apólices representará a população e as classes do sistema representarão as sub-populações.

Este modelo considera que todos os anos entram elementos para a população e que, ao fim de um intervalo de tempo finito, estes transitarão para um estado absorvente final que representa a saída desse elemento da população. Desta forma, um SBM continua bem representado mesmo utilizando uma carteira aberta.

2.3.2 Matrizes de Probabilidades de Transição

Associada à matriz das Regras de Transição, apresentada na secção 2.2, define-se uma matriz designada por matriz de Probabilidades de Transição, definida por:

$$p_{T,\lambda}(i, j) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) t_{ij}(k) = P_{\lambda}(Z_{S,n+1} = j \mid Z_{S,n} = i) \quad i, j = 1, \dots, s$$

onde

- $p_k(\lambda)$ - probabilidade de um segurado, com frequência de sinistralidade λ , originar k sinistros numa anuidade;
- $Z_{S,n}$ - variável aleatória que representa a classe do sistema em que uma determinada apólice se encontra no período n ;
- $t_{ij}(k)$ - definida como em (2.1).

A matriz $\mathbf{P}_{T,\lambda} = [p_{T,\lambda}(i, j)]$ é a matriz de probabilidades de transição num passo, para uma dada frequência de sinistralidade λ , em conformidade com as regras de transição \mathbf{T} .

Seja $\mathbf{q}_{1,\lambda}$ o vetor que contém as probabilidades, para as s classes do sistema, de um segurado abandonar a Seguradora, para uma dada frequência de sinistralidade λ .

Consideremos então uma matriz de Transição com $s + 1$ estados onde o estado $s + 1$ representa a saída de um segurado da carteira.

A matriz de Probabilidades de Transição, considerando uma carteira aberta, é definida da seguinte forma:

$$\mathbf{P}_{T,\lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1,\lambda} & \mathbf{q}_{1,\lambda} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma vez que, no final de cada anuidade, um segurado ou permanece na carteira, numa das s classes possíveis, ou abandona a Seguradora, cada linha da matriz $\mathbf{P}_{T,\lambda}$ terá de somar um. Assim, cada elemento da matriz $\mathbf{K}_{1,\lambda}$ é dado por:

$$k_{1,\lambda}(i, j) = p_{T,\lambda}(i, j) (1 - q_{1,\lambda}(j)) \quad i, j = 1, \dots, s.$$

2.3.3 O Número de Sinistros - O Processo de Poisson Misto

Consideremos que o Processo de Poisson Misto se adequa à realidade do Número de Sinistros originados numa carteira de seguro automóvel.

Este é um modelo que se adequa frequentemente à realidade de uma carteira de seguro automóvel, uma vez que se considera que o risco pode diferir de apólice para apólice.

Seja $N(t)$ o número de sinistros declarados em $[0, t]$ por um segurado retirado ao acaso da carteira. Se se considerar um processo de Poisson Misto $\{N(t), t \geq 0\}$ para representar a distribuição do número de sinistros tem-se:

$$N(t) \sim \mathcal{P}(\Lambda t), \quad \Lambda \sim U(\lambda)$$

onde a variável aleatória Λ é designada por Variável de Estrutura e $U(\lambda)$ por Distribuição de Estrutura, e verifica-se:

1. $N(0) = 0$ - no momento inicial ainda não foi declarado nenhum sinistro;
2. $E[N(t)] = t E[\Lambda]$ - o número médio de sinistros declarados num período de tempo t é proporcional ao valor esperado da distribuição de estrutura;
3. $\text{Var}[N(t)] = t E[\Lambda] + t^2 \text{Var}[\Lambda]$ - a variância do número de sinistros declarados é superior ao seu valor esperado;
4. $P[N(t+s) - N(t) = k] = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dU(\lambda)$ - a probabilidade de ocorrência de um sinistro é igual quando se consideram intervalos de tempo de igual amplitude.

A partir de 4. conclui-se que $P[N(t) = k] = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} u(\lambda) d\lambda$, uma vez que os incrementos são estacionários.

Diversos estudos revelam que várias distribuições podem ser utilizadas como distribuições de estrutura para modelar o Número de Sinistros. A escolha dessa distribuição irá refletir o grau de heterogeneidade da carteira.

As distribuições de estrutura mais usuais são a distribuição Gama e a distribuição Inversa Gaussiana embora a distribuição LogNormal também possa representar uma escolha adequada. Nesta dissertação será considerado o Modelo Poisson-Gama.

O Modelo Poisson-Gama

Quando se considera que a distribuição de estrutura tem distribuição $Gama(\alpha, \beta)$ encontramos-nos perante um modelo Poisson-Gama. A função densidade da variável aleatória Λ é dada por:

$$u_{\Lambda}(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^{\alpha} e^{-\beta\lambda} \lambda^{\alpha-1}, \quad \lambda > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

onde $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$, e o valor esperado e variância são dados, respetivamente, por:

- $E[\Lambda] = \frac{\alpha}{\beta}$
- $\text{Var}[\Lambda] = \frac{\alpha}{\beta^2}$.

Como, neste caso, $N(t) \sim \mathcal{P}(\Lambda t)$, com $\Lambda \sim Gama(\alpha, \beta)$, a função de probabilidade de $N(t)$ é dada por:

$$f_{N(t)}(k) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^{\alpha} e^{-\beta\lambda} \lambda^{\alpha-1} d\lambda = \binom{\alpha + k - 1}{k} \left(\frac{\beta}{\beta + t} \right)^{\alpha} \left(\frac{t}{\beta + t} \right)^k$$

de onde se conclui que $N(t) \sim BN\left(\alpha, \frac{\beta}{\beta + t}\right)$.

Como o período da carteira automóvel é, geralmente, um ano, fazendo $t = 1$ no item 2. e 3. da secção 2.3.3 obtém-se:

- $E[N] = E[\Lambda] = \frac{\alpha}{\beta}$
- $\text{Var}[N] = E[\Lambda] + \text{Var}[\Lambda] = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\beta + 1}{\beta} \right)$.

O Estimador de Máxima Verosimilhança (EMV), $\hat{\alpha}$, para α é obtido resolvendo a equação (2.2) e $\hat{\beta}$, o EMV para β , encontra-se na equação (2.3) e podem ser consultados, por exemplo, em Lemaire (1995).

$$\sum_{k=0}^m n_k \left(\frac{1}{\hat{\alpha}} + \dots + \frac{1}{\hat{\alpha} + k - 1} \right) = \sum_{k=0}^m n_k \ln \left(1 + \frac{\bar{x}}{\hat{\alpha}} \right) \quad (2.2)$$

$$\hat{\beta} = \frac{\alpha}{\bar{x}} \quad (2.3)$$

2.3.4 As Entradas no Sistema - Modelo Assimptótico

Diversos cenários se podem colocar na modelação do número de novas apólices que entram na carteira em cada ano i , $i \in \mathbb{N}$. Seguindo Guerreiro et al. (2014), adotar-se-á como um possível modelo de entradas um modelo assimptótico para o qual se assume que:

- As entradas na carteira ocorrem todas no início de cada anuidade.
- O número médio de entradas de apólices no sistema é dado por:

$$\vartheta_i = \tau(1 - e^{-\delta i}), \quad i \in \mathbb{N}, \quad \tau \in \mathbb{R}^+, \quad \delta \in \mathbb{R}^+ \quad (2.4)$$

onde τ representa o limite superior para o número de segurados que entrarão anualmente para a carteira.

- Sendo E_i o número de segurados a entrar para o sistema no ano i , (E_1, E_2, \dots, E_n) é uma sequência de variáveis aleatórias independentes com distribuição Poisson com parâmetro ϑ_i , isto é, $E_i \sim \mathcal{P}(\vartheta_i)$.

Este modelo adequa-se facilmente às entradas no sistema, uma vez que caso não existisse um limite superior para o número de entradas, a longo prazo, a Seguradora dominaria todo o mercado.

Outras soluções podem ser adoptadas, desde que garantida a convergência do modelo de Vórtices Estocásticos, como é o caso do modelo proposto em Esquivel et al. (2014). Nesse artigo os autores estudam em detalhe as condições de convergência do modelo, em função da modelação das entradas no sistema.

2.3.5 Estimadores de Máxima Verosimilhança para o Modelo Assimptótico

Consideremos (E_1, E_2, \dots, E_n) uma amostra de vetores independentes com distribuição Poisson onde $\mathbf{E}_i^T = (E_{i1}, E_{i2}, \dots, E_{is})$ e E_{ij} representa o número de novas apólices que foram alocadas à classe j no ano i , com $j = 1, 2, \dots, s$, $i \in \mathbb{N}$.

Seja $\mathbf{c}^T = (c_1, c_2, \dots, c_s)$ o vetor com as probabilidades de alocação em cada classe j , constante para todo o ano i , com $j = 1, 2, \dots, s$, $i \in \mathbb{N}$.

Se considerarmos $\vartheta_{ij} = \tau(1 - e^{-\delta i})c_j$, o número médio de novas apólices alocadas à classe j no ano i , temos, ver Guerreiro et al. (2014),

$$E_{ij} \sim \mathcal{P}(\vartheta_{ij}) \equiv \mathcal{P}(\vartheta_i c_j), \quad i \in \mathbb{N}, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

A função log-verosimilhança para uma amostra $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ é dada por:

$$l_{\Omega}(\vartheta; \mathbf{c}) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s \log(e_{ij}!) - \sum_{i=1}^n \vartheta_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s e_{ij} [\log(\vartheta_i) + \log(c_j)]. \quad (2.5)$$

Os Estimadores de Máxima Verosimilhança (EMV) $(\hat{\tau}, \hat{\delta})$ para (τ, δ) podem ser obtidos a partir da expressão (2.5) e encontram-se no sistema (2.6).

$$\begin{cases} \hat{\tau} = \frac{E_{\bullet\bullet}}{\sum_{i=1}^n (1 - e^{-\hat{\delta}i})} \\ \hat{\tau} \sum_{i=1}^n i e^{-\hat{\delta}i} = \sum_{i=1}^n E_{i\bullet} \times \frac{i e^{-\hat{\delta}i}}{1 - e^{-\hat{\delta}i}} \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\text{com } E_{\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s E_{ij} \text{ e } E_{i\bullet} = \sum_{j=1}^s E_{ij}.$$

O EMV $\hat{\mathbf{c}}^T = (\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_s)$ para $\mathbf{c}^T = (c_1, c_2, \dots, c_s)$ é dado por (2.7)

$$\hat{c}_j = \frac{E_{\bullet j}}{E_{\bullet\bullet}}. \quad (2.7)$$

$$\text{com } E_{\bullet j} = \sum_{i=1}^n E_{ij}.$$

Para mais detalhes acerca da obtenção dos estimadores pode consultar-se Guerreiro et al. (2014).

2.3.6 A Distribuição Limite

A probabilidade de um segurado, com frequência de sinistralidade λ , se encontrar na classe j , numa perspectiva de longo prazo, é dada pela distribuição limite do modelo, habitualmente representada por $\pi_{T,\lambda}(j)$.

Segundo Guerreiro et al. (2014), no caso de a carteira ter crescimento assintótico, isto é, se o número de novas apólices esperadas na carteira no período i for dado por (2.4), e se os segurados forem alocados nas classes de acordo com o vetor \mathbf{c} então, numa perspectiva de longo prazo, temos:

$$\mathfrak{g}_{\infty,\lambda}^{+T} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathfrak{g}_{m,\lambda}^{+T} = \tau \mathbf{c}^T (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{1,\lambda})^{-1}$$

onde $\mathfrak{g}_{m,\lambda}^{+T}$ representa o número esperado de segurados nas diversas classes do sistema passados m anos, para uma certa frequência de sinistralidade λ , e \mathbf{I} representa a matriz identidade de dimensão $s \times s$.

A distribuição limite para a classe j , dada uma frequência de sinistralidade λ , pode ser obtida através da expressão (2.8)

$$\pi_{\infty,\lambda}(j) = \frac{\mathfrak{g}_{\infty,\lambda}^{+T}(j)}{\sum_{j=1}^s \mathfrak{g}_{\infty,\lambda}^{+T}(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (2.8)$$

Tendo em conta que λ é o resultado de uma variável aleatória $\Lambda \sim U(\lambda)$, a distribuição limite para uma apólice retirada ao acaso da carteira é dada pela expressão (2.9)

$$\pi_{\infty}(j) = \int_0^{+\infty} \pi_{\infty,\lambda}(j) dU(\lambda), \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (2.9)$$

O cálculo dos integrais indicados necessita, em muitas situações, de métodos numéricos pelo que pode optar-se pela discretização da distribuição de estrutura, obtendo-se uma distribuição aproximada. Neste caso, a distribuição limite para uma apólice retirada ao acaso da carteira é dada pela expressão (2.10)

$$\pi_{\infty}(j) = \sum_{\lambda} \pi_{\infty,\lambda}(j) u_{\lambda}^d, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (2.10)$$

com u_{λ}^d o vetor das probabilidades da distribuição $U(\lambda)$ discretizada.

2.3.7 A Evolução do Prémio Médio

Seja $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_s)$ a escala de prémios do SBM. Conforme mencionado na secção 2.2, b_i não representa o prémio a pagar mas sim um fator multiplicativo a aplicar ao prémio determinado pela tarificação *a priori*. Naturalmente, o Prémio Médio da carteira representa também um fator multiplicativo a aplicar ao prémio determinado pela tarificação *a priori*.

O Prémio Médio da carteira, numa perspetiva de longo prazo, pode ser determinado a partir da expressão (2.11):

$$PE = \sum_{j=1}^s b(j) \pi_{\infty}(j). \quad (2.11)$$

Para se calcular o Prémio Médio da carteira num determinado período m , é necessário obter a percentagem de apólices em cada classe do SBM ao fim de m anos. A distribuição das apólices pelas classes do SBM, ao fim de m anos, para uma certa frequência de sinistralidade λ , é dada pela expressão (2.12)

$$\pi_{m,\lambda}(j) = \frac{\vartheta_{m,\lambda}^{+T}(j)}{\sum_{j=1}^s \vartheta_{m,\lambda}^{+T}(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.12)$$

Para o caso de uma carteira com crescimento assintótico, $\vartheta_{m,\lambda}^{+T}(j)$ será determinado através da expressão (2.13)

$$\vartheta_{m,\lambda}^{+T}(j) = \sum_{i=1}^m \vartheta_i \mathbf{c}_i^T \mathbf{K}_{\lambda}^{m-i} \quad (2.13)$$

onde $\mathbf{K}_{\lambda}^{m-i}$ representa a matriz de probabilidades de transição em $m - i$ passos.

Tendo em conta, novamente, que λ é o resultado de uma variável aleatória $\Lambda \sim U(\lambda)$, a distribuição para uma apólice retirada ao acaso da carteira no ano m é dada pela expressão (2.14):

$$\pi_m(j) = \int_0^{+\infty} \pi_{m,\lambda}(j) dU(\lambda). \quad (2.14)$$

Conforme mencionado anteriormente, pode optar-se pela discretização da distribuição de estrutura para o cálculo dos integrais indicados e, neste caso, a distribuição de uma apólice retirada ao acaso da carteira no ano m é dada pela expressão (2.15):

$$\pi_m(j) = \sum_{\lambda} \pi_{m,\lambda}(j) u_{\lambda}^d, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (2.15)$$

O Prémio Médio da carteira, no ano m , pode ser determinado a partir da expressão (2.16):

$$PE_m = \sum_{j=1}^s b(j) \pi_m(j). \quad (2.16)$$

Desta forma, é possível estudar a evolução do Prémio Médio ao longo dos anos.

2.3.8 As Escalas Ótimas de Prémios

A determinação dos prémios a cobrar aos segurados exige a maior atenção por parte de qualquer Seguradora, isto porque os fatores multiplicativos a aplicar têm de ser determinados de modo a que não só o sistema concebido seja adequado, mas também a proporcionar estabilidade financeira. Um sistema adequado é aquele que tende a aplicar prémios justos a cada segurado e equilibrados em termos de risco assumido pela Seguradora.

Nas últimas décadas muitos autores têm tentado desenvolver modelos para determinar a escala ótima de prémios para um dado SBM. São exemplo disso os trabalhos de Norberg (1976), Borgan et al. (1981), Gilde e Sundt (1989), Andrade e Silva (1991), Denuit e Dhaene (2000) e mais recentemente, por exemplo, Tan et al. (2015). Embora o objetivo desta dissertação não seja auxiliar a Seguradora na escolha de uma escala ótima de prémios, serão apresentados os modelos mais utilizados, juntamente com as respetivas medidas de eficiência, de modo a que, no futuro, possa ser feita uma comparação entre as diferentes escalas de prémios.

2.3.8.1 A Escala de Norberg

A escala proposta por Norberg (1976) utiliza uma abordagem próxima à da Teoria da Credibilidade, e é construída com base na distribuição estacionária da carteira.

Sejam S_n as indemnizações agregadas relativas a um segurado no n -ésimo período da sua apólice. Suponha-se que, conhecida a frequência de sinistralidade λ , S_n , $n \in \mathbb{N}$, são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.

Segundo Norberg (1976), o prémio a cobrar corresponde ao Prémio Puro de Credibilidade para o período n , baseado em $Z_{S,n}$, e é dado por:

$$\mu_n(Z_{S,n}) = E[E[S_n|\lambda] | Z_{S,n}].$$

Seja $b_n(Z_{S,n})$ um estimador para o prêmio a cobrar $E[S_n|\lambda]$. O objetivo da Escala de Norberg é minimizar o Erro Quadrático Médio do estimador $b_n(Z_{S,n})$, ou seja, minimizar (2.17):

$$\begin{aligned} Q_n(S) &= E[[E[S_n|\lambda] - b_n(Z_{S,n})]^2] = \int_0^\infty [E[S_n|\lambda] - b_n(Z_{S,n})]^2 dU(\lambda) = \\ &= \int_0^\infty \sum_{j=1}^s [E[S_n|\lambda] - b_n(j)]^2 p_{S,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda) \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde $p_{S,\lambda}^{(n)}(j) = P[Z_{S,n} = j | \lambda]$ é a probabilidade de um certo segurado, com frequência de sinistralidade λ , se encontrar na classe j no período n .

$\mu_n(Z_{S,n})$ é o estimador que minimiza (2.17) e a demonstração deste resultado pode ser consultada em Norberg (1976).

O prêmio ótimo de cada classe j seria então dado por $b_n(j) = E[E[S_n|\lambda] | Z_{S,n} = j]$, $j = 1, 2, \dots, s$, que depende de n , contrariando portanto a hipótese de que os prêmios são independentes do instante n .

Com vista a resolver o problema, Norberg propôs que se minimizasse o valor limite de $Q_n(S)$, uma vez que assumida a estacionaridade da carteira os prêmios já não variam. Desta forma, o novo objetivo é minimizar (2.18)

$$Q_0(S) = E[[E[S^*|\lambda] - b(Z_T)]^2] \quad (2.18)$$

com S^* uma variável aleatória identicamente distribuída a S_n e $b(Z_T) = E[E[S_n|\lambda] | Z_T] = E[E[S^*|\lambda] | Z_T]$.

Derivando $Q_0(S)$ em ordem a $b_T(j)$ e igualando a zero, para cada $j = 1, 2, \dots, s$ obtém-se a escala ótima de prêmios de Norberg:

$$b_T(j) = \frac{\int_0^\infty E[S^*|\lambda] \pi_{T,\lambda}(j) dU(\lambda)}{\pi_T(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Considerando que S_n depende de λ apenas através da distribuição do número de sinistros e que o custo médio dos sinistros é igual a uma unidade monetária então $E[S^*|\lambda] = E[X] E[N|\lambda] = E[N|\lambda] = \lambda$, uma vez que N segue uma distribuição de Poisson. Neste caso, a escala ótima de prêmios proposta por Norberg pode ser obtida a partir de (2.19)

$$b_T(j) = \frac{\int_0^\infty \lambda \pi_{T,\lambda}(j) dU(\lambda)}{\pi_T(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (2.19)$$

O seguinte teorema, que pode ser consultado em Norberg (1976) e em Centeno (2003), permite medir a eficiência associada a esta escala de prêmios.

Teorema 2.3.1 (Medida de Eficiência de Norberg) *Sejam S e \tilde{S} dois SBM com regras de transição T e \tilde{T} , respetivamente, e escalas de prêmios calculadas de acordo com (2.19). T é mais eficiente que \tilde{T} e, portanto, $Q_0(S) < Q_0(\tilde{S})$ se e só se $e(T) > e(\tilde{T})$, com*

$$e(\mathbf{T}) = E[b_T^2(Z_T)] = \sum_{j=1}^s b_T^2(j) \pi_T(j).$$

Esta medida de eficiência não tem interpretação por si própria, pelo que deve ser utilizada quando se pretende comparar dois SBM.

Esta escala foi alvo de algumas críticas pois nos casos em que a convergência do SBM para a estacionaridade é lenta, os prémios cobrados a cada apólice não representam adequadamente o risco que cada segurado representa para a Seguradora. Os segurados com baixa frequência de sinistralidade poderão pagar prémios elevados durante muito tempo e os segurados com elevada frequência de sinistralidade poderão pagar prémios demasiado baixos. Outra crítica apresentada prende-se com o facto de a escala de prémios assim obtida não garantir que a ordenação dos mesmos esteja de acordo com a propensão à sinistralidade, isto é, um segurado com maior frequência de sinistralidade pode pagar um prémio inferior ao de outro segurado com menor frequência de sinistralidade.

2.3.8.2 A Escala de Borgan, Hoem e Norberg

A Escala de Borgan, Hoem e Norberg, proposta em Borgan et al. (1981), não é obtida exclusivamente com base na distribuição estacionária da carteira, ao contrário da Escala de Norberg (1976). Neste modelo os autores sugerem a introdução de um sistema de ponderadores não negativos $\{w_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, cuja soma seja a unidade, em que w_0 representa o peso a atribuir à distribuição estacionária e w_n , $n \in \mathbb{N}$ o peso a atribuir ao período n .

Os autores colocam como objetivo minimizar (2.20)

$$Q(S) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n Q_n(S) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^s [E[S_n|\lambda] - b(j)]^2 p_{S,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda) \quad (2.20)$$

considerando $p_{S,\lambda}^{(0)}(j) = \pi_{T,\lambda}(j)$, $j = 1, 2, \dots, s$.

Derivando $Q(S)$ em ordem a $b(j)$ e igualando a zero, para cada $j = 1, 2, \dots, s$ obtém-se a escala ótima de prémios de Borgan, Hoem e Norberg:

$$b^B(j) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} E[S_n|\lambda] p_{S,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda)}{p_S(j)}, j = 1, 2, \dots, s \quad (2.21)$$

com $p_S(j) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} p_{S,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda)$.

Borgan et al. (1981) propõe dois cenários diferentes para a escolha do conjunto de ponderadores:

- **1º cenário:** Considerar $w_n = i v^n = w_{n-1} v$, com $v = \frac{1}{i+1}$. Neste cenário, o peso atribuído aos diferentes anos diminui com o avanço dos mesmos.

- **2º cenário:** Definir uma variável aleatória que reflita a antiguidade de cada apólice na carteira. O conjunto dos ponderadores corresponde à probabilidade de uma apólice da carteira ter n anos de vigência, assumindo que esta distribuição é independente do ano de calendário.

Note-se que se se considerar $w_0 = 1$ e $w_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, obtém-se a Escala de Norberg, pelo que esta é um caso particular da Escala de Borgan, Hoem e Norberg.

O seguinte teorema pode ser consultado em Borgan et al. (1981) e em Centeno (2003), e permite medir a eficiência associada a esta escala de prémios.

Teorema 2.3.2 (Medida de Eficiência de Borgan et al.) *Sejam S e \tilde{S} dois SBM com regras de transição T e \tilde{T} , respetivamente, e escalas de prémios calculadas de acordo com (2.21). T é mais eficiente que \tilde{T} e, portanto, $Q(S) < Q(\tilde{S})$ se e só se $e(T) > e(\tilde{T})$, com*

$$e(T) = \sum_{j=1}^s [b^B(j)]^2 p_S(j).$$

Tal como a medida de eficiência de Norberg, esta medida de eficiência não tem interpretação por si própria, pelo que deve ser utilizada quando se pretende comparar dois SBM.

Esta escala também não garante que a ordenação da escala de prémios esteja de acordo com a propensão à sinistralidade e essa foi a crítica apresentada à mesma.

2.3.8.3 A Escala de Gilde e Sundt

Tal como já foi referido, as duas escalas anteriores não garantem que a ordenação da escala de prémios esteja de acordo com a propensão à sinistralidade, por isso, a escala proposta por Gilde e Sundt (1989) vem dar resposta à crítica dos dois modelos anteriores. Através da linearização da escala ótima, os autores garantem uma evolução regular dos prémios entre as classes e de acordo com a propensão à sinistralidade, isto é, à medida que o risco associado a uma classe aumenta, o prémio a pagar é também superior.

O objetivo da Escala de Gilde e Sundt é minimizar (2.20) sujeito às restrições (2.22)

$$b(j) = k + m \cdot j, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (2.22)$$

Os EMV para (k, m) podem ser obtidos a partir da expressão (2.20) e encontram-se no sistema (2.23).

$$\begin{cases} k = \sum_{j=1}^s b^B(j) p_S(j) - m \sum_{j=1}^s j p_S(j) \\ m = \frac{\sum_{j=1}^s j b^B(j) p_S(j) - \left(\sum_{j=1}^s j p_S(j) \right) \left(\sum_{j=1}^s b^B(j) p_S(j) \right)}{\sum_{j=1}^s j^2 p_S(j) - \left[\sum_{j=1}^s j p_S(j) \right]^2} \end{cases} \quad (2.23)$$

Para mais detalhes acerca da obtenção destes estimadores pode consultar-se, por exemplo, Gilde e Sundt (1989) ou Centeno (2003).

Nesta escala, a diferença entre o prémio de duas classes consecutivas é constante e igual a m .

Gilde e Sundt (1989) propõe o cálculo do quociente

$$\frac{e(\mathbf{T})}{e(\tilde{\mathbf{T}})}$$

onde $e(\mathbf{T})$ é a eficiência da escala de Borgan, Hoem e Norberg ou da escala de Norberg e $e(\tilde{\mathbf{T}})$ a eficiência da escala de Gilde, para avaliar a perda de eficiência ocorrida por se escolher a Escala de Gilde em detrimento de uma das outras escalas apresentadas anteriormente.

Se o quociente se aproximar da unidade, pode afirmar-se que a perda de eficiência não é significativa e as restrições podem ser introduzidas no modelo sem que haja perda de qualidade nas estimativas obtidas.

2.3.8.4 A Escala de Andrade e Silva

A escala proposta em Andrade e Silva (1988) e Andrade e Silva (1991), à semelhança da Escala de Gilde, pretende solucionar as limitações dos modelos de Norberg (1976) e Borgan et al. (1981).

O objetivo da Escala de Andrade e Silva é minimizar (2.20) sujeito às restrições (2.24)

$$b(j) = a \cdot b^j, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (2.24)$$

Os EMV para (a, b) podem ser determinados a partir de (2.25) e de (2.26)

$$a = \frac{\sum_{j=1}^s b^j b^B(j) p_S(j)}{\sum_{j=1}^s b^{2j} p_S(j)} \quad (2.25)$$

$$a \left[a \sum_{j=1}^s j b^{2j-1} p_S(j) - \sum_{j=1}^s j b^{j-1} b^B(j) p_S(j) \right] = 0. \quad (2.26)$$

Substituindo a expressão (2.25) em (2.26) obtém-se:

$$\left(\sum_{j=1}^s b^j b^B(j) p_S(j) \right) \left(\sum_{j=1}^s j b^{2j} p_S(j) \right) = \left(\sum_{j=1}^s b^{2j} p_S(j) \right) \left(\sum_{j=1}^s j b^j b^B(j) p_S(j) \right)$$

Se as classes do SBM estiverem ordenadas de acordo com a propensão à sinistralidade, o valor de b deverá ser superior a um, pois desta forma os prémios evoluirão de acordo com a propensão à sinistralidade.

O ponto de estacionaridade que se obtiver será certamente um minimizante, já que $\frac{\partial Q(s)}{\partial b} < 0$ em $b = 1$ e os valores admissíveis supõem $b > 1$.

Uma vez determinada a solução de b , substituindo em (2.25), obtém-se facilmente o valor de a e, conseqüentemente, a escala ótima de prêmios.

Andrade e Silva (1991) propõe, à semelhança de Gilde e Sundt (1989), a análise do quociente

$$\frac{e(\mathbf{T})}{e(\tilde{\mathbf{T}})}$$

onde $e(\mathbf{T})$ é a eficiência da escala de Borgan, Hoem e Norberg ou da escala de Norberg e $e(\tilde{\mathbf{T}})$ a eficiência da escala de Andrade e Silva, para avaliar a perda de eficiência ocorrida por se optar pela Escala de Andrade e Silva em detrimento da escala de Borgan, Hoem e Norberg ou da escala de Norberg.

Toda a exposição apresentada até este ponto refere-se ao modelo de Vórtices Estocásticos. Como o objetivo desta dissertação é a apresentação de algumas vantagens da utilização da Simulação para a obtenção de resultados importantes de SBM, no capítulo seguinte será apresentado o modelo de Simulação e o modo como será implementado.

SIMULAÇÃO

3.1 O que é a Simulação?

A Simulação pode ser definida como: "representação, através de um modelo físico ou matemático, de um fenómeno complexo, do comportamento de um aparelho ou da evolução de um sistema, com fins de estudo, medição ou ensaio" (Oliveira (1996)). Isto é, quando um fenómeno é de tal forma complexo imita-se o seu comportamento, recorrendo a um modelo físico ou matemático, de forma a investigar os seus efeitos.

A Tabela 3.1 representa as vantagens e desvantagens da utilização de um Modelo de Simulação em vez de um Modelo Analítico, como refere van der Aalst e Voorhoeve (2000).

Tabela 3.1: Vantagens e desvantagens da utilização de um Modelo de Simulação vs Modelo Analítico

Vantagens da utilização de um Modelo de Simulação vs Modelo Analítico
<ul style="list-style-type: none">• A Simulação é flexível. Qualquer situação, mesmo que complexa, pode ser estudada recorrendo à Simulação.
<ul style="list-style-type: none">• A Simulação é fácil de ser entendida.
Desvantagens da utilização de um Modelo de Simulação vs Modelo Analítico
<ul style="list-style-type: none">• De forma a serem obtidos resultados fiáveis, um estudo de simulação pode se tornar muito demorado.
<ul style="list-style-type: none">• Exige algum cuidado na interpretação de resultados.
<ul style="list-style-type: none">• A Simulação não oferece demonstrações.

Nesta dissertação utilizar-se-á a Simulação para estudar o comportamento de uma carteira de seguro automóvel para a qual são permitidas entradas e saídas de segurados.

3.2 O Modelo de Simulação

Na Figura 3.1 encontra-se representado um fluxograma do modelo de Simulação, de modo a explicar melhor a forma como este foi implementado. Neste fluxograma, o índice p representa o número de Simulações realizadas. A determinação do número de Simulações necessárias será apresentada mais adiante.

Em cada Simulação, começa-se por definir a variável N_T , que representa o número total de segurados da carteira, e inicializá-la em zero, uma vez que se optou por considerar que no ano inicial a carteira não possui segurados.

Após este passo pode percorrer-se os diversos anos de Simulação, representados pelo índice i no fluxograma. Em cada ano de Simulação, começa-se por gerar o número de segurados que entram para a carteira nesse ano, representado por N_i , a partir de uma variável aleatória com a distribuição de entradas assumida, por exemplo, a distribuição Poisson de parâmetro ϑ_i definida de acordo com o que foi apresentado no capítulo 2.

Para cada um dos novos segurados gerar-se-á a respetiva classe de entrada, c_k , de acordo com as probabilidades de alocação consideradas. Caso não se trate da primeira anuidade, juntar-se-ão estes segurados aos já existentes na carteira desde que se encontrem na mesma classe.

Para todos os segurados da carteira simular-se-á o número de sinistros declarados na corrente anuidade, n_m , recorrendo a uma variável aleatória com distribuição Poisson-Gama.

Sabendo a classe onde cada segurado se encontra e o número de sinistros que cada um declarou nesta anuidade, é ainda necessário determinar quais os segurados que permanecem na carteira e, para estes segurados, a classe para a qual transitarão na anuidade seguinte. Para isso, é necessário gerar um número aleatório auxiliar, a partir de uma variável aleatória com distribuição Uniforme[0, 1], representado por r_m no fluxograma, que em conjunto com a probabilidade de anulação da classe em que o segurado se encontrava ditará se o segurado abandona ou não a carteira.

Por fim, caso o segurado abandone a carteira, o número total de segurados será reduzido numa unidade; caso contrário, é definida a classe para onde o segurado transitará na anuidade seguinte com base na matriz das Regras de Transição e no número de sinistros que o segurado declarou à Seguradora na presente anuidade.

Após estes passos é possível calcular os resultados de SBM desejados e compará-los com os obtidos no modelo de Vórtices Estocásticos.

Nesta dissertação pretende-se estudar a evolução de uma carteira de seguro automóvel, e, por isso, é necessário decidir quantos anos serão considerados no estudo. Após algumas tentativas, foram considerados 50 anos, uma vez que para este valor os resultados obtidos já eram semelhantes aos obtidos com o modelo de Vórtices Estocásticos.

Como os resultados obtidos já se encontravam de acordo com o pretendido, o próximo passo foi escolher quantas Simulações se pretendiam realizar. Este passo é importante

pois quanto mais Simulações se realizarem mais precisos serão os resultados. Em contrapartida, como já foi mencionado anteriormente, um estudo de simulação pode revelar-se muito demorado se, por exemplo, o número de Simulações realizadas for muito elevado. Assim, foram realizadas apenas cem Simulações devido a dificuldades computacionais e, desta forma, os resultados do modelo de Simulação apresentados no capítulo seguinte são resultado da média destas simulações.

Uma vez que não foi possível computacionalmente o cálculo de alguns integrais referidos no capítulo 2, no modelo de Vórtices Estocásticos optou-se por discretizar a distribuição de estrutura. Assim, na primeira parte desta dissertação, uma vez que se pretende validar o modelo de Simulação, recorrer-se-á também à discretização da distribuição de estrutura. Na segunda parte, como na Simulação não há necessidade de calcular esses integrais, determinar-se-ão os resultados pretendidos sem recorrer à discretização da distribuição de estrutura. Adicionalmente, estudar-se-ão três cenários em que se considera uma distribuição diferente para o modelo de entradas. O estudo teórico destes cenários seria certamente muito mais complexo de ser realizado.

O modelo de simulação foi programado em Java, tendo sido validados os geradores das distribuições utilizadas através do teste do Qui-Quadrado. Os resultados desse teste encontram-se na Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Resultados dos testes de ajustamento

Distribuição	gl	$\chi^2_{gl;0.95}$	Qui-Quadrado	Decisão
Uniforme	9	16.919	7.4436	Não Rejeitar
Poisson	7	14.067	12.003	Não Rejeitar
Gama	6	12.592	7.8702	Não Rejeitar

No próximo capítulo serão aplicados os conhecimentos adquiridos nos capítulos 2 e 3 a uma carteira de Seguro Automóvel.

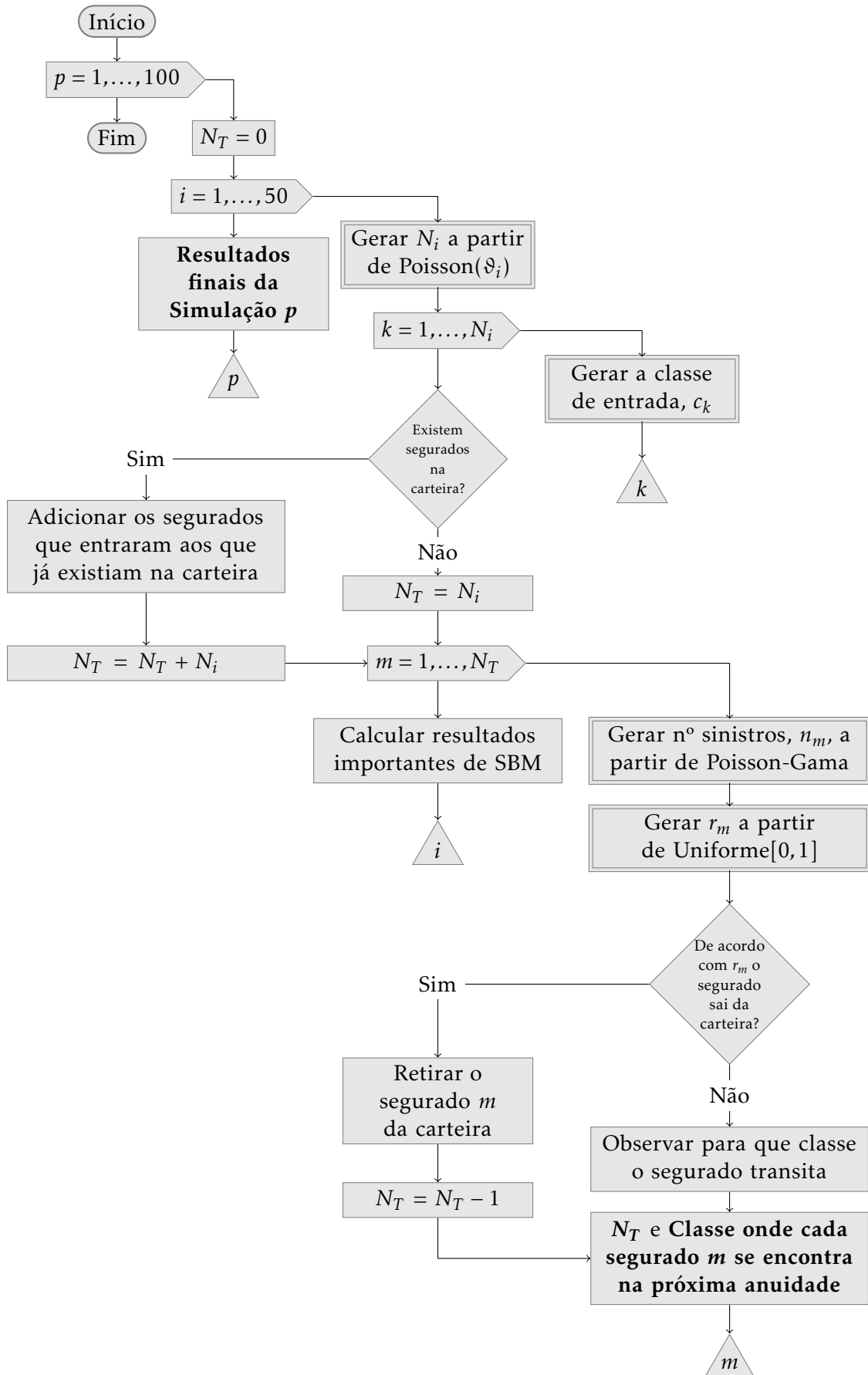


Figura 3.1: Modelo de Simulação

A SIMULAÇÃO E OS SISTEMAS DE BONUS MALUS

Ao longo deste capítulo serão aplicados os conhecimentos dos capítulos anteriores a uma carteira de Seguro Automóvel. Será utilizado um SBM de uma Seguradora Portuguesa bem como todos os dados relativos à carteira de responsabilidade civil automóvel à data de 2006.

4.1 Caso de Estudo: As Características da Seguradora

4.1.1 Características do *Sistema de Bonus Malus*

- **Número de Classes:** 20 classes;
- **Ordenação das Classes:** De acordo com a propensão à sinistralidade;
- **Classe de Entrada:** Classe 10;
- **Regras de Transição:**
 - Por cada anuidade sem sinistros, descida de uma classe;
 - Pelo primeiro sinistro declarado numa anuidade, com responsabilidade do segurado, mesmo que parcial, subida de duas classes;
 - Por cada um dos restantes sinistros declarados durante uma anuidade, com responsabilidade do segurado, mesmo que parcial, subida de cinco classes.

4.1.2 Classes do *Sistema de Bonus Malus*

Conforme mencionado anteriormente, o SBM da Seguradora é composto por 20 classes: 10 de classes de agravamento, 9 classes de desconto e 1 classe sem desconto nem agravamento. Na Tabela 4.1 podem ser observados os descontos e agravamentos atribuídos em cada classe, na escala em vigor na seguradora.

Tabela 4.1: Classes do SBM

Classe	Desconto	Classe	Agravamento
1	50%	11	10%
2	45%	12	20%
3	40%	13	30%
4	35%	14	40%
5	30%	15	55%
6	25%	16	70%
7	20%	17	85%
8	15%	18	100%
9	10%	19	125%
10	0%	20	150%

4.1.3 Vetor dos Prêmios

O vetor dos prêmios do SBM em questão está representado em (4.1) e foi obtido de acordo com os descontos e agravamentos presentes na Tabela 4.1.

$$\mathbf{b}' = [50 \ 55 \ 60 \ 65 \ 70 \ 75 \ 80 \ 85 \ 90 \ 100 \ 110 \ 120 \ 130 \ 140 \ 155 \ 170 \ 185 \ 200 \ 225 \ 250] \quad (4.1)$$

4.1.4 Matriz de Regras de Transição

De acordo com as Regras de Transição descritas anteriormente, a Matriz de Regras de Transição do SBM encontra-se definida em (4.2).

$$\mathbf{T} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc} \{0\} & - & \{1\} & - & - & - & - & \{2\} & - & - & - & - & \{3\} & - & - & - & - & \{4\} & - & \{5, 6, \dots\} \\ \{0\} & - & - & \{1\} & - & - & - & - & \{2\} & - & - & - & - & \{3\} & - & - & - & - & \{4\} & \{5, 6, \dots\} \\ - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & - & - & - & \{2\} & - & - & - & - & \{3\} & - & - & - & - & \{4, 5, \dots\} \\ - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & - & - & - & \{2\} & - & - & - & - & \{3\} & - & - & - & \{4, 5, \dots\} \\ - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & - & - & - & \{2\} & - & - & - & - & \{3\} & - & - & \{4, 5, \dots\} \\ - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & - & - & - & \{2\} & - & - & - & - & \{3\} & - & \{4, 5, \dots\} \\ - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & - & - & - & \{2\} & - & - & - & \{3\} & \{4, 5, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & - & - & - & \{2\} & - & - & - & \{3, 4, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & - & - & - & \{2\} & - & - & \{3, 4, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & - & - & - & \{2\} & - & \{3, 4, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & - & - & - & \{2\} & \{3, 4, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & - & - & - & \{2, 3, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & - & - & \{2, 3, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & - & \{2, 3, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & \{2, 3, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1, 2, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & \{1, 2, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & \{1, 2, \dots\} \end{array} \right] \end{matrix} \quad (4.2)$$

O SBM desta Seguradora pode ser considerado como uma Cadeia de Markov e pode ser representado pelo grafo da Figura 4.1.

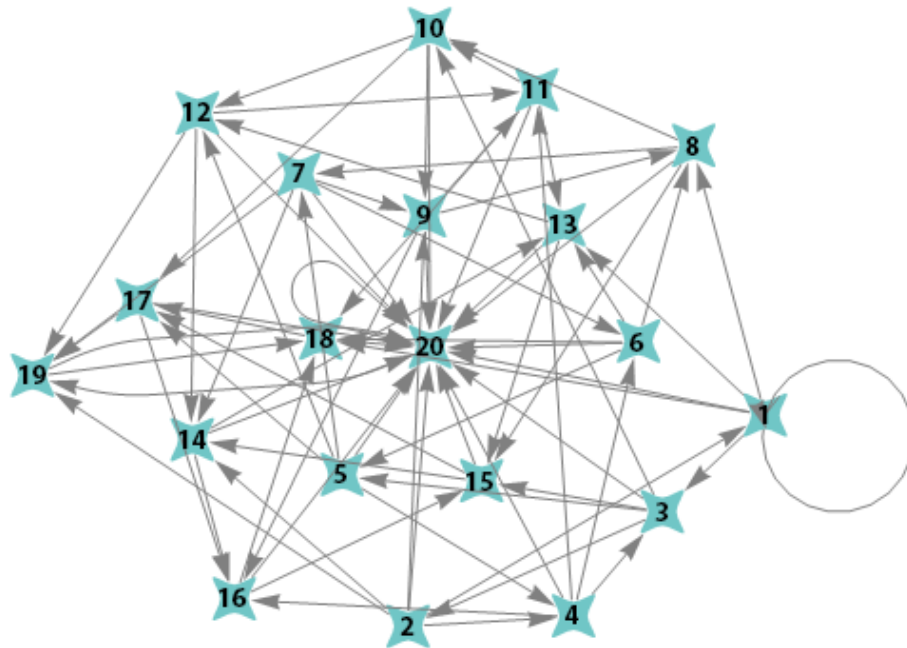


Figura 4.1: Representação da Cadeia de Markov

Analisando a matriz representada em (4.2) e a Figura 4.1 pode verificar-se que esta cadeia é uma cadeia irreduzível pois apenas admite uma classe de comunicação e é aperiódica, uma vez que todos os seus estados apresentam período igual a 1.

4.1.5 O Número de Sinistros

Na Tabela 4.2 é possível observar a distribuição do número de sinistros declarados à Seguradora no ano 2006.

Tabela 4.2: Distribuição observada do número de sinistros - Ano 2006

Número de Sinistros	Número de Apólices
0	191.449
1	12.170
2	913
3	80
4	8
5	2
6	1
Total	204.623

Analisando a Tabela 4.2, verifica-se que grande parte dos segurados não declarou sinistros à Seguradora durante a anuidade, pelo que a distribuição do número de sinistros é assimétrica à direita. O valor esperado e a variância do número de sinistros encontram-se em (4.3) e (4.4), respetivamente.

$$E(N) = 0,0698064 \quad (4.3)$$

$$\text{Var}(N) = 0,0770146. \quad (4.4)$$

4.1.5.1 A Distribuição do Número de Sinistros

Com base nos dados da Tabela 4.2, e utilizando os Estimadores de Máxima Verosimilhança determinados na secção 2.3.3, obtiveram-se as estimativas apresentadas na Tabela 4.3 para os parâmetros das distribuições consideradas.

Efetuuou-se, em simultâneo, um teste à distribuição de Poisson, onde se considerou que o parâmetro λ é igual para todos os segurados da carteira. Esta hipótese corresponderia a considerar que o número de sinistros seguiria um Processo de Poisson Homogéneo, o que raramente se verifica numa carteira de Seguro Automóvel.

Tabela 4.3: Distribuição observada do número de sinistros - Ano 2006

Distribuição Poisson	Distribuição Poisson-Gama
$\hat{\lambda} = 0,0698064$	$\hat{\alpha} = 0,695826$ $\hat{\beta} = 9,96793$

Aplicando o teste de Qui-Quadrado, fazendo os agrupamentos necessários, obteve-se os seguintes resultados quanto ao ajustamento da distribuição Poisson e da distribuição Poisson-Gama, apresentados nas Tabelas 4.4 e 4.5, respetivamente.

Tabela 4.4: Número de sinistros observados e ajustados - Modelo de Poisson

i	o_i	p_i	e_i
0	191.449	0,932574	190.826,0896
1	12.170	0,0650997	13.320,89591
≥ 2	1004	0,0023260	475,9524432
Total	204.623	1	204.623

O valor obtido para a estatística do χ^2 , para o caso em que se considera a distribuição Poisson, foi $X_{obs}^2 = \sum_{i=0}^2 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 687,313$. Como $X_{obs}^2 > \chi_{1;0.95}^2 = 3,841$ rejeita-se, claramente, a um nível de significância de 5%, a hipótese de o número de sinistros ser proveniente de uma distribuição Poisson. Este resultado já era de esperar, conforme anteriormente referido.

Tabela 4.5: Número de Sinistros Observados e Ajustados - Distribuição Poisson-Gama

i	o_i	p_i	e_i
0	191.449	0,935642	191.453,873
1	12.170	0,0593588	12.146,17573
2	913	0,00458893	939,0006234
≥ 3	91	0,000410616	84,02146938
Total	204.623	1	204.623

Para o caso em que se considera a distribuição Poisson-Gama, o valor obtido para a estatística do χ^2 foi $X_{obs}^2 = \sum_{i=0}^3 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 1,34642$. Como $X_{obs}^2 < \chi_{1;0.95}^2 = 3,841$ não se rejeita, a um nível de significância de 5%, a hipótese de o número de sinistros ser proveniente de uma distribuição Poisson-Gama.

Na Tabela 4.6 apresenta-se um resumo dos resultados obtidos.

Tabela 4.6: Resultados dos testes de ajustamento

Distribuição	gl	$\chi_{gl;0.95}^2$	Qui-Quadrado	p-value	Decisão
Poisson	1	3,841	687,313	$5,64711 \times 10^{-150}$	Rejeitar
Poisson-Gama	1	3,841	1,34642	0,718135	Não Rejeitar

Assim, no que se segue, considerar-se-á que a variável aleatória representativa do Número de Sinistros declarados à Seguradora segue uma distribuição Poisson-Gama com parâmetros $\alpha = 0,695826$ e $\beta = 9,96793$.

4.1.6 As Probabilidades de Alocação

Consideremos, daqui por diante, que o vetor de probabilidades de alocação, \vec{c} , é constante, isto é, o vetor é independente do ano e da frequência de sinistralidade do segurado, λ . As probabilidades apresentadas na Tabela 4.7 foram obtidas em Guerreiro et al. (2014) e estimadas pelos autores.

Tabela 4.7: Probabilidades de Alocação às classes do Sistema

Classe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c(j)	0,3525	0,0595	0,1655	0,0654	0,2003	0,0135	0,0124	0,0089	0,0274	0,0637

Classe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
c(j)	0,0003	0,0002	0,0001	8×10^{-5}	4×10^{-5}	2×10^{-5}	3×10^{-5}	3×10^{-5}	4×10^{-6}	2×10^{-5}

É possível observar na Tabela 4.7 que, apesar da classe de entrada definida no SBM ser a Classe 10, apenas 6% dos novos segurados são colocados nessa classe. É de notar ainda que a maioria dos segurados entram no sistema diretamente para a Classe 1, a classe

com maior desconto, e uma grande parte entra nas Classes 3 e 5. Pode ainda verificar-se que a probabilidade de um novo segurado ser colocado em qualquer uma das classes de agravamento é muito baixa.

4.1.7 As Probabilidades de Anulação

Consideremos, no que se segue, o vetor de probabilidades de anulação, \mathbf{q} , estimado em Guerreiro et al. (2014) e apresentado na Tabela 4.8.

Tabela 4.8: Probabilidades de Anulação

Classe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$q(j)$	0,1043	0,1275	0,1542	0,1833	0,2248	0,2179	0,2473	0,2350	0,2375	0,4533

Classe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$q(j)$	0,3909	0,4718	0,5621	0,5964	0,5703	0,7353	0,9487	0,4815	0,7364	0,8276

Analisando a Tabela 4.8 verifica-se que as classes com desconto possuem probabilidades de saída relativamente baixas, enquanto que as classes com agravamento possuem probabilidades de saída bastante elevadas. Isto pode dever-se ao facto de um segurado se sentir satisfeito na Seguradora enquanto se encontrar nas classes em que o prémio cobrado é mais baixo, ao passo que se o prémio cobrado for elevado o segurado procura novas Seguradoras, a fim de tentar diminuir o prémio a pagar.

4.1.8 As Entradas no Sistema

Para implementar o modelo proposto para SBM em carteiras abertas, é necessário efetuar um ajustamento às entradas no sistema para garantir que este verifica a condição de existência de distribuição limite (ver Esquivel et al. (2014)).

Na Tabela 4.9 apresentam-se as entradas de novas apólices na carteira de 1997 até 2007, fornecidos em Guerreiro et al. (2014). A partir desses dados será ajustado um Modelo de Ajustamento Assimptótico, para o qual se garante a existência de distribuição limite para o modelo de Vórtices Estocásticos (ver Guerreiro et al. (2014)).

Tabela 4.9: Número de Novas Apólices (1997 a 2007)

Ano i	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Apólices	4.107	9.607	15.829	22.443	29.216	34.770	39.686	32.588	46.692	49.283	44.996

Utilizando os Estimadores de Máxima Verosimilhança apresentados na secção 2.3.5 obteve-se:

$$\begin{cases} \hat{\tau} = 113.792,49 \\ \hat{\delta} = 0,053217 \end{cases} \quad (4.5)$$

e, portanto, o modelo adotado para o número médio de entradas anuais de apólices para a carteira é dado por:

$$\vartheta_i = 113.792,49(1 - e^{-0,053217i}), i \in \mathbb{N}$$

e pode ser observado na Figura 4.2.

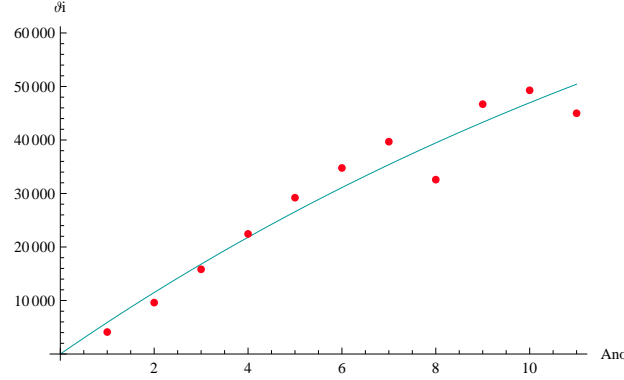


Figura 4.2: Número de novas apólices no sistema por ano

No mercado português e para a dimensão da seguradora em causa, o EMV obtido para τ pode ser considerado pouco realista. Uma alternativa, apresentada em Guerreiro et al. (2014), seria escolher um valor de τ adequado a longo prazo, fixá-lo e estimar δ de acordo com essa suposição. Nesta dissertação, optou-se por utilizar as estimativas de máxima verosimilhança.

4.2 A Teoria dos Vórtices Estocásticos - Resultados

Ao longo desta secção serão apresentados os resultados obtidos utilizando a Teoria dos Vórtices Estocásticos, descrita em Guerreiro et al. (2014).

4.2.1 A Distribuição Limite

Associada à Matriz das Regras de Transição definida em (4.2) apresenta-se a seguinte Matriz de Probabilidades de Transição, $P_{T,\lambda}$.

$$P_{T,\lambda} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \end{matrix} & \begin{bmatrix} p_0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^4 p_i \\ p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & 1 - \sum_{i=0}^4 p_i \\ 0 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^3 p_i \\ 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^3 p_i \\ 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^3 p_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^3 p_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & 1 - \sum_{i=0}^3 p_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^2 p_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^2 p_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^2 p_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 1 - \sum_{i=0}^2 p_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^1 p_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^1 p_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 1 - \sum_{i=0}^1 p_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 1 - \sum_{i=0}^1 p_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 1 - p_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 1 - p_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 1 - p_0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (4.6)$$

onde

$$p_i = \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!}, \quad i \in \mathbb{N}_0,$$

uma vez que se considerou que o número de sinistros segue uma distribuição Poisson-Gama.

Seja $\mathbf{K}_{1,\lambda}$ a matriz de dimensão 20×20 que contém as probabilidades de transição num passo entre as diversas classes do SBM, tendo em conta as probabilidades de anulação definidas anteriormente. Os elementos da matriz $\mathbf{K}_{1,\lambda}$ são obtidos a partir dos elementos da matriz (4.6) da seguinte forma:

$$k_{1,\lambda}(i, j) = p_{T,\lambda}(i, j) (1 - q_{1,\lambda}(j)), \quad i, j = 1, \dots, 20$$

Uma vez que não foi possível proceder ao cálculo dos integrais presentes em (2.9) recorrendo a um *software*, optou-se por discretizar a distribuição de estrutura utilizando o Método do Arredondamento à Unidade Mais Próxima, que pode ser consultado, por exemplo, em Centeno (2003)).

Na Figura 4.3 está representada a função densidade de probabilidade da distribuição $\text{Gama}(\alpha, \beta)$ com $\alpha = 0,695826$ e $\beta = 9,96793$.

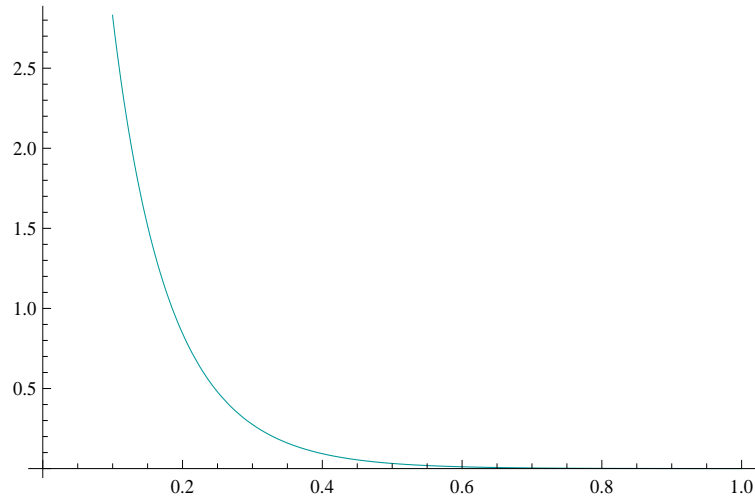


Figura 4.3: Função Densidade de Probabilidade da Distribuição Gama

Analisando a Figura 4.3 é possível observar que a probabilidade de extrair um número superior a um a partir da distribuição $\text{Gama}(0,695826; 9,96793)$ é bastante reduzida.

Como o valor do seguinte integral

$$\int_0^1 u_{\Lambda}(\lambda) d\lambda$$

é igual a 0,999983, para a distribuição Gama em estudo, optou-se por se discretizar a distribuição de estrutura até 1 com um passo $h = 0.01$.

Os resultados da discretização da distribuição Gama para $\lambda \in]0, 1]$ encontram-se na Tabela A.1.

Na Tabela 4.10 encontram-se os resultados obtidos para a distribuição limite considerando o modelo de Vórtices Estocásticos. Estes resultados foram obtidos utilizando a expressão (2.8) seguida da expressão (2.10), uma vez que se optou pela discretização da distribuição de estrutura.

Tabela 4.10: Distribuição Limite da Carteira - Teoria dos Vórtices Estocásticos

Classe	Vórtices Estocásticos
1	0,687968
2	0,073563
3	0,085414
4	0,043598
5	0,042841
6	0,015288
7	0,015860
8	0,011206
9	0,010178
10	0,010364
11	0,001356
12	0,000932
13	0,000491
14	0,000309
15	0,000211
16	0,000127
17	0,000119
18	0,000057
19	0,000039
20	0,000081

Na Figura 4.4 encontra-se uma representação da Distribuição Limite obtida considerando o modelo de Vórtices Estocásticos.

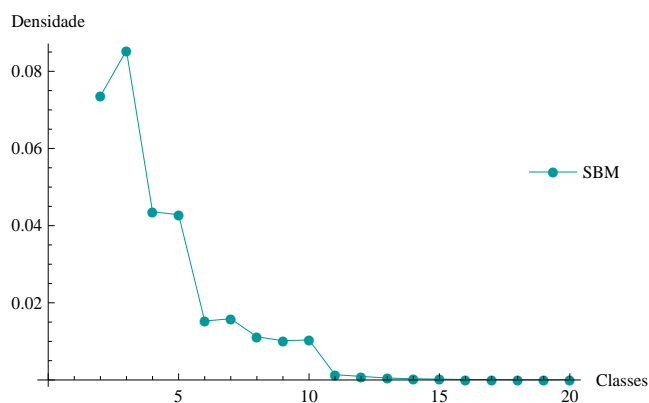


Figura 4.4: Distribuição limite obtida - modelo de Vórtices Estocásticos - Sem Classe 1

Analisando a Tabela 4.10 e a Figura 4.4, é possível observar que, a longo prazo, se estima que a maioria das apólices se encontre nas classes de *bonus*. Nas cinco classes que garantem maior desconto estima-se que, a longo prazo, se situem mais de 90% das apólices.

Estes resultados já eram de esperar, uma vez que ao considerar para a distribuição de estrutura a distribuição Gama com $\alpha = 0,695826$ e $\beta = 9,96793$ é pouco provável um segurado ter uma frequência de sinistralidade elevada e, consequentemente, originar muitos sinistros. Como a maioria das apólices que se encontram nas classes de agravamento pertencem a segurados com elevada frequência de sinistralidade fica explicada a concentração de apólices nas classes com descontos.

É, também, possível observar que a distribuição das apólices pelas classes, a longo prazo, não é decrescente. Os picos mais acentuados são justificados pela magnitude das probabilidades de alocação e de anulação em cada uma das classes.

4.2.2 A Evolução da Percentagem de Apólices

Na Figura 4.5 encontra-se representada a evolução da percentagem de apólices nas Classes 1, 5, 10 e 15.

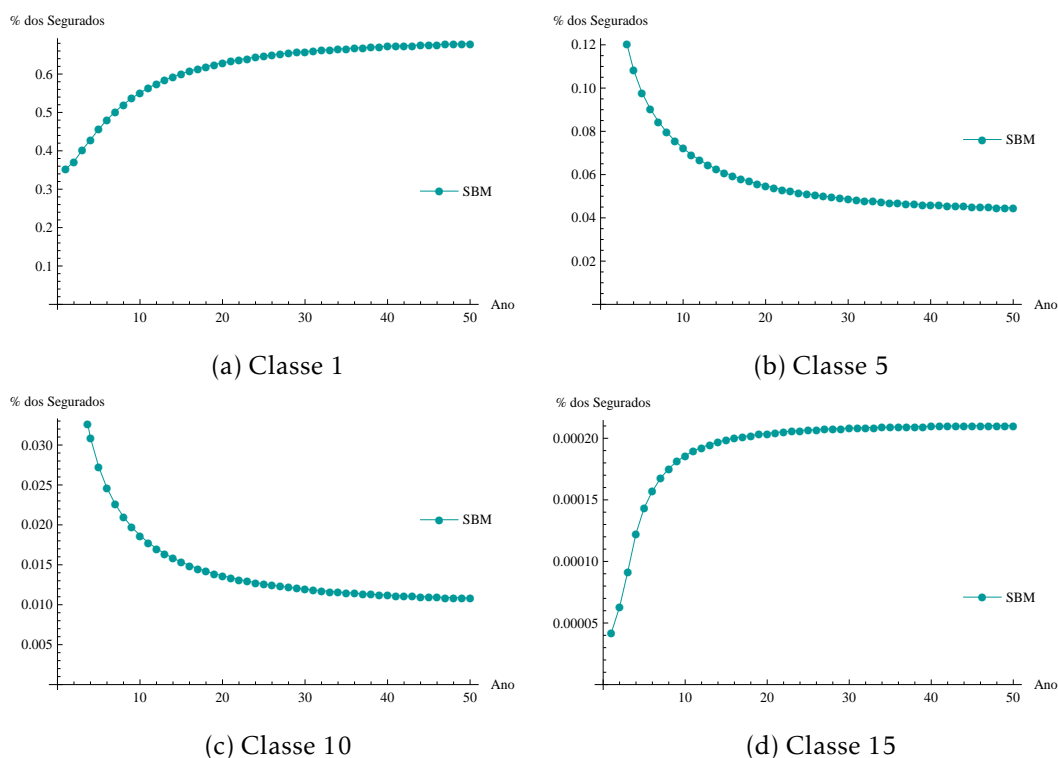


Figura 4.5: Evolução da percentagem de apólices - Classe 1, 5, 10 e 15

Como era de esperar, a percentagem de apólices na Classe 1 vai aumentando ao longo dos anos até estabilizar. Tal acontece devido ao facto de muitos dos novos segurados entrarem diretamente para esta classe e, uma vez que é a classe com maior desconto, ser

reduzida a probabilidade de anulação. Para além disso, ao considerar para distribuição de estrutura a distribuição Gama com $\alpha = 0,695826$ e $\beta = 9,96793$, que reflete que a carteira é maioritariamente composta por segurados com baixas frequências de sinistralidade, as apólices têm tendência a concentrar-se nas classes com descontos e, por isso, é natural o comportamento observado.

Na Classe 5, a diferença entre as probabilidades de anulação e de alocação é bastante reduzida mas pode ser uma das causas do decréscimo da percentagem de apólices. Para além disso, a transição de segurados para outras classes é também uma das razões desse comportamento pois se os segurados transitam maioritariamente para a Classe 1, as restantes classes ficam, obrigatoriamente, com menos segurados.

Como se pode verificar na Tabela 4.8, quase 50% das apólices que se encontram na Classe 10 são anuladas e, apesar de ser a classe de entrada, apenas 6% dos novos segurados são lá alocados, como se pode observar na Tabela 4.7, o que pode justificar o comportamento observado.

Da análise da evolução da distribuição das apólices pelas classes do Sistema foi possível verificar que, no modelo de Vórtices Estocásticos, a carteira da Seguradora atinge a estacionaridade ao fim de 242 anos. Na realidade, considerar que uma carteira só atinge a estacionaridade ao fim de um longo prazo não é um benefício, uma vez que a Seguradora poderá estar a estimar incorretamente os seus prémios ótimos devido à distribuição dos segurados pelas classes não coincidir com a distribuição utilizada.

4.2.3 A Evolução do Prémio Médio

Na Figura 4.6 encontra-se representada a evolução do prémio médio ao longo de 50 anos.

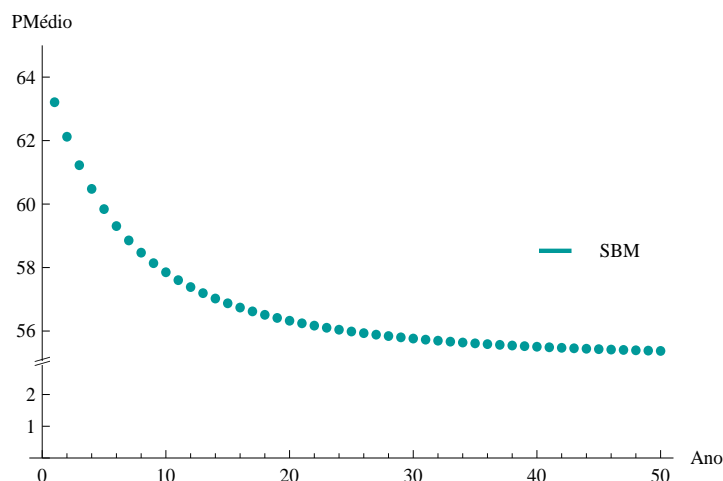


Figura 4.6: Evolução do Prémio Médio ao longo de 50 anos, em percentagem do Prémio Puro

Através da análise da Figura 4.6, é possível observar que, embora segundo o modelo de Vórtices Estocásticos o Prémio Médio estabilize passados aproximadamente 25 anos, em 50 anos o prémio estacionário ainda não foi atingido.

Ao fim de 50 anos o Prémio Médio é de 55,3733% enquanto que, em condições de estacionaridade, isto é, ao fim de 242 anos, o Prémio Médio é de 55,2069%, segundo o modelo de Vórtices Estocásticos.

No primeiro ano, o Prémio Médio ronda os 63% em vez dos 100% que se obteria se a entrada dos novos segurados fosse feita apenas por uma classe do sistema, como se ilustrou na Tabela 4.7.

4.2.4 A Evolução do Prémio Total

A análise do prémio total é importante, em conjunto com uma estimativa das despesas em cada ano, a fim de analisar a solvência da Seguradora bem como a adequabilidade dos prémios e escala em vigor. A importância desta análise prende-se com o facto de uma análise do prémio médio da carteira não permitir prever situações financeiras menos favoráveis.

A evolução do prémio total ao longo de 50 anos, considerando um Prémio Puro médio de 250 unidades monetárias (u.m.), encontra-se representada na Figura 4.7.

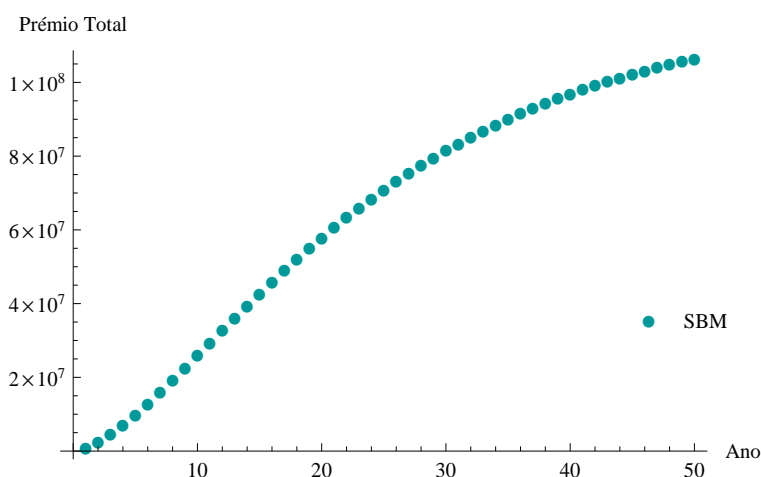


Figura 4.7: Evolução do Prémio Total ao longo de 50 anos

Embora se verifique uma tendência crescente do prémio total nada se pode concluir pois caso as despesas associadas aos sinistros e a despesas com funcionários e logísticas sejam superiores, a Seguradora poderá entrar em insolvência.

A avaliação da probabilidade de ruína numa carteira de seguro automóvel é também influenciada pelo facto de se considerar uma carteira aberta em detrimento dos modelos usuais de SBM, conforme ilustrado em Silva (2014) e Afonso et al. (2016).

4.2.5 As Escalas Ótimas de Prémios

Nesta secção serão apresentados os resultados obtidos para as escalas ótimas de prémios apresentadas no capítulo 2, considerando o modelo de Vórtices Estocásticos.

4.2.5.1 A Escala de Norberg

A escala ótima de prémios proposta por Norberg (1976) é facilmente obtida utilizando os resultados da secção 4.2.1 para a distribuição limite.

Na Tabela 4.11 encontram-se os resultados alcançados para a escala ótima de Norberg para o modelo de Vórtices Estocásticos.

Tabela 4.11: Escala Ótima de Norberg - Teoria dos Vórtices Estocásticos

Classe	Vórtices Estocásticos
1	53,38
2	81,92
3	90,89
4	87,98
5	91,19
6	104,88
7	104,46
8	114,09
9	99,66
10	100,00
11	204,71
12	221,08
13	259,91
14	275,93
15	294,99
16	301,88
17	314,49
18	335,08
19	360,02
20	396,13

Na Figura 4.8 encontra-se uma representação da escala de Norberg obtida considerando o modelo de Vórtices Estocásticos.

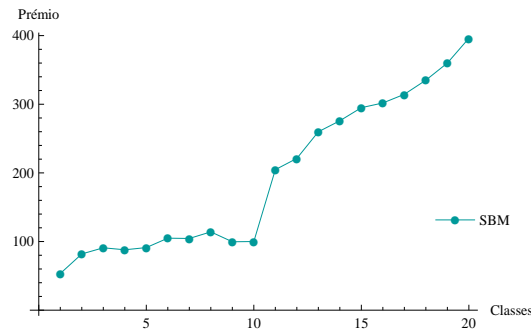


Figura 4.8: Escala de Norberg - Resultados

Através da análise da Figura 4.8 e da Tabela 4.11 é possível constatar que a Escala de Norberg não se encontra ordenada de acordo com a propensão à sinistralidade e que as Classes 6 a 8 apresentam estimativas para a percentagem do prémio puro a cobrar que não são coerentes com classes de desconto.

A uma apólice que se encontre na Classe 10 será cobrado um prémio que corresponde a 100% do prémio puro enquanto que a uma apólice que se encontre na Classe 11, a classe imediatamente a seguir, será cobrado um prémio 100% superior ao cobrado na Classe 10. Desta forma, poderá levantar-se a seguinte questão: será que o aumento da frequência de sinistralidade da Classe 10 para a Classe 11 justifica o aumento tão acentuado do prémio a pagar? Esta escala pode não ser a mais adequada.

4.2.5.2 A Escala de Borgan, Hoem e Norberg

Seguindo o primeiro cenário sugerido em Borgan et al. (1981), assumindo-se um horizonte de 20 anos de permanência na carteira e fixando $i = 0,05$, considere-se os seguintes ponderadores:

$$\begin{cases} w_k = \frac{w_{k-1}}{1.05}, & k \in \{2, \dots, 20\} \\ w_k = 0, & k = 0 \vee k > 20 \\ \sum_{k=0}^{20} w_k = 1 \end{cases} \quad (4.7)$$

Na Tabela 4.12 encontram-se os resultados obtidos, considerando o modelo de Vórtices Estocásticos, para a distribuição ponderada, $p_S(j)$, utilizando os ponderadores definidos em (4.7).

Tabela 4.12: Distribuição Ponderada - Teoria dos Vórtices Estocásticos

Classe	Vórtices Estocásticos
1	0,50702
2	0,08986
3	0,12167

4	0,07346
5	0,09335
6	0,02123
7	0,02757
8	0,01555
9	0,02050
10	0,02618
11	0,00143
12	0,00107
13	0,00038
14	0,00025
15	0,00015
16	0,00011
17	0,00010
18	0,00004
19	0,00003
20	0,00006

Na Figura 4.9 é possível comparar os resultados obtidos para a distribuição ponderada e para a distribuição limite.

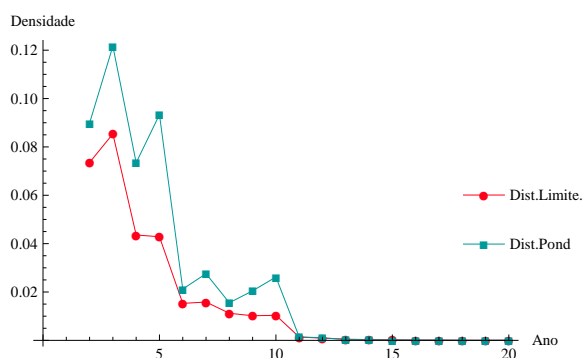


Figura 4.9: Comparação entre as Distribuições Limite e Ponderada

Por questões de escala e, conseqüente, melhor análise da Figura 4.9, foram ocultados os resultados obtidos referentes à Classe 1.

Analisando a Figura anterior é possível observar que a distribuição ponderada estima uma maior proporção de apólices nas primeiras onze classes do sistema quando comparada com a distribuição limite. Consequentemente, a proporção de apólices nas restantes classes do sistema é inferior. Ambas as distribuições consideram que a maioria das apólices se encontra na Classe 1 do sistema.

Definidos os ponderadores e determinada a distribuição ponderada, torna-se possível a aplicação de (2.21) de forma a obter a escala ótima de prêmios de Borgan et al. (1981).

Na Tabela 4.13 encontram-se os resultados obtidos para a escala ótima de Borgan considerando o modelo de Vórtices Estocásticos.

Tabela 4.13: Escala Ótima de Borgan et al. - Teoria dos Vórtices Estocásticos

Classe	Vórtices Estocásticos
1	78,00
2	92,47
3	100,89
4	95,17
5	97,69
6	110,25
7	107,80
8	113,93
9	100,81
10	100,00
11	224,24
12	243,28
13	304,81
14	317,71
15	353,94
16	354,16
17	371,27
18	391,28
19	442,78
20	475,78

Na Figura 4.10 encontra-se uma representação dos prêmios obtidos para a Escala de Borgan considerando o modelo de Vórtices Estocásticos.

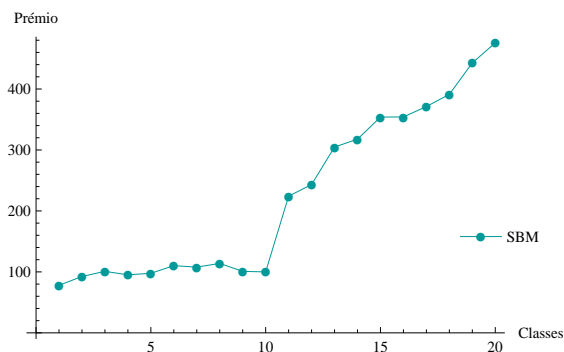


Figura 4.10: Escala de Borgan - Resultados

Através da análise das Figuras 4.10 e das Tabelas 4.13, é possível verificar que o comportamento da escala de Borgan é semelhante ao da escala de Norberg, mantendo-se as mesmas incongruências com os prêmios a cobrar nas Classes 6, 7 e 8, que, de acordo com as regras de transição, deveriam ser classes de desconto.

4.2.5.3 A Escala de Gilde e Sundt

A escala de Gilde e Sundt apresentada em seguida foi obtida linearizando a escala ótima de Borgan, Hoem e Norberg, considerando o modelo de Vórtices Estocásticos.

Na Tabela 4.14 encontram-se os resultados obtidos para a escala ótima de Gilde e Sundt obtida por aplicação de (2.22) após determinação de k e m (ver capítulo 2).

Tabela 4.14: Escala Ótima de Gilde e Sundt - Teoria dos Vórtices Estocásticos

Classe	Vórtices Estocásticos
1	65,13
2	69,00
3	72,88
4	76,75
5	80,63
6	84,50
7	88,38
8	92,25
9	96,13
10	100,00
11	103,88
12	107,75
13	111,62
14	115,50
15	119,37
16	123,25
17	127,12
18	131,00
19	134,87
20	138,75

Na Figura 4.11 encontra-se uma representação dos prêmios obtidos para a escala de Gilde e Sundt considerando o modelo de Vórtices Estocásticos.

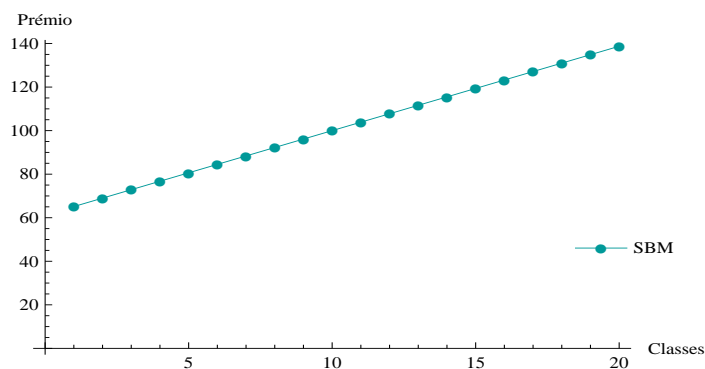


Figura 4.11: Escala de Gilde - Resultados

Mais à frente nesta dissertação será feita uma comparação entre os prêmios obtidos para as diversas escalas.

4.2.5.4 A Escala de Andrade e Silva

À semelhança da escala de Gilde e Sundt, a escala de Andrade e Silva apresentada em seguida foi obtida com base na escala ótima de Borgan, Hoem e Norberg.

Na Tabela 4.15 encontram-se os resultados obtidos para a escala ótima de Andrade e Silva obtida por aplicação de (2.24) após determinação de a e b (ver capítulo 2).

Tabela 4.15: Escala Ótima de Andrade e Silva - Teoria dos Vórtices Estocásticos

Classe	Vórtices Estocásticos
1	64,17
2	67,41
3	70,82
4	74,40
5	78,16
6	82,10
7	86,25
8	90,61
9	95,19
10	100,00
11	105,05
12	110,36
13	115,94
14	121,80
15	127,95
16	134,42
17	141,21

18	148,34
19	155,84
20	163,71

Na Figura 4.12 encontra-se uma representação dos prémios obtidos para a escala de Andrade e Silva considerando o modelo de Vórtices Estocásticos.

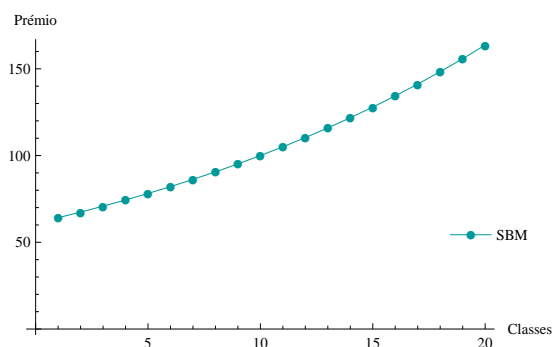


Figura 4.12: Escala de Andrade e Silva - Resultados

4.2.5.5 Análise das Escalas Ótimas de Prémios

A Figura 4.13 permite comparar a escala comercial da Seguradora com as quatro escalas ótimas de prémios estudadas anteriormente.

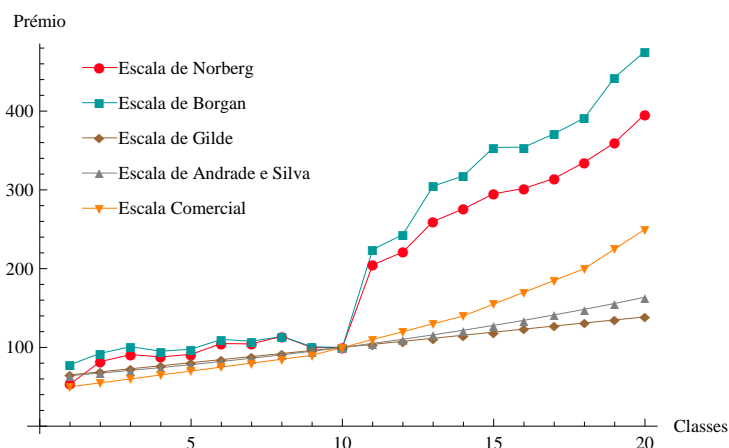


Figura 4.13: Comparação das Escalas de Prémios

A escala de Borgan et al. (1981) é a escala que propõe prémios mais elevados, independentemente da classe do sistema em que os segurados se encontrem, seguida da escala de Norberg (1976). A escala de Gilde e Sundt (1989) apresenta prémios bastante próximos aos da escala de Andrade e Silva (1991). A escala comercial, embora próxima das escalas de Gilde e Sundt (1989) e Andrade e Silva (1991), penaliza mais os segurados das classes mais altas e bonifica mais os segurados das classes mais baixas.

De modo a optar pela escala que tornaria o SBM mais eficiente, é necessário determinar as medidas de eficiência conforme mencionado no capítulo 2. Uma vez que o objetivo desta dissertação não é a escolha de uma escala ótima, deixa-se para mais tarde a análise deste tema.

Na próxima secção serão apresentados os resultados do modelo de Simulação, quando aplicado aos pressupostos do modelo de Vórtices Estocásticos, de modo a validar o mesmo, isto é, pretende-se mostrar que um modelo de Simulação é capaz de reproduzir o modelo de Vórtices Estocásticos gerando resultados semelhantes.

4.3 O Modelo de Simulação - Validação

Tal como mencionado anteriormente, nesta secção serão apresentados os resultados do modelo de Simulação quando aplicado aos pressupostos do modelo de Vórtices Estocásticos. À semelhança do modelo de Vórtices Estocásticos recorrer-se-á à discretização da distribuição de estrutura até um com um passo $h = 0,01$, utilizando o Método do Arredondamento à Unidade Mais Próxima. Desta forma, a frequência de sinistralidade de um segurado apenas pode assumir cem valores em vez de assumir qualquer valor no suporte da distribuição Gama considerada.

4.3.1 A Distribuição Limite

A distribuição limite é determinada calculando a percentagem de segurados em cada classe da carteira no ano 50, valor determinado no capítulo 3. Na Tabela B.1 encontra-se a distribuição limite obtida para o modelo de Simulação em que se consideram todos os pressupostos do modelo de Vórtices Estocásticos.

Na Figura 4.14 encontra-se uma comparação entre as distribuições limite obtidas considerando os modelos de Vórtices Estocásticos e de Simulação.

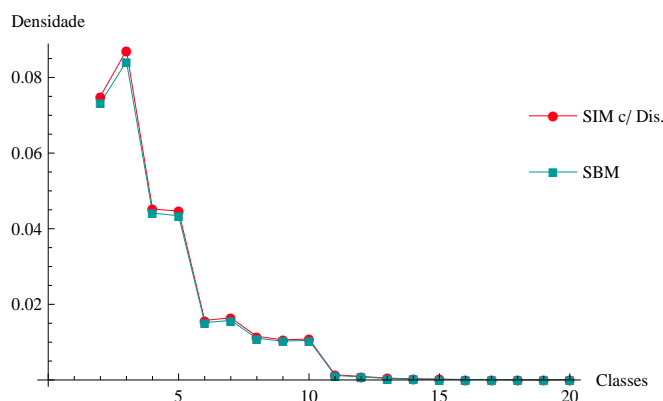


Figura 4.14: Comparação entre as distribuições limite obtidas - SBM e Simulação

Comparando os resultados obtidos através dos dois modelos é possível constatar que os valores obtidos através do modelo de Simulação são, em geral, superiores. No entanto, os resultados são muito semelhantes.

É de notar que a distribuição limite obtida considerando o modelo de Vórtices Estocásticos foi atingida ao fim de 242 anos enquanto que o modelo de Simulação, em apenas 50 anos, obtém resultados semelhantes.

4.3.2 A Evolução da Percentagem de Apólices

Através da Figura 4.15 é possível comparar a evolução da percentagem de apólices nas Classes 1, 5, 10 e 15 obtida considerando o modelo de Vórtices Estocásticos e considerando o modelo de Simulação.

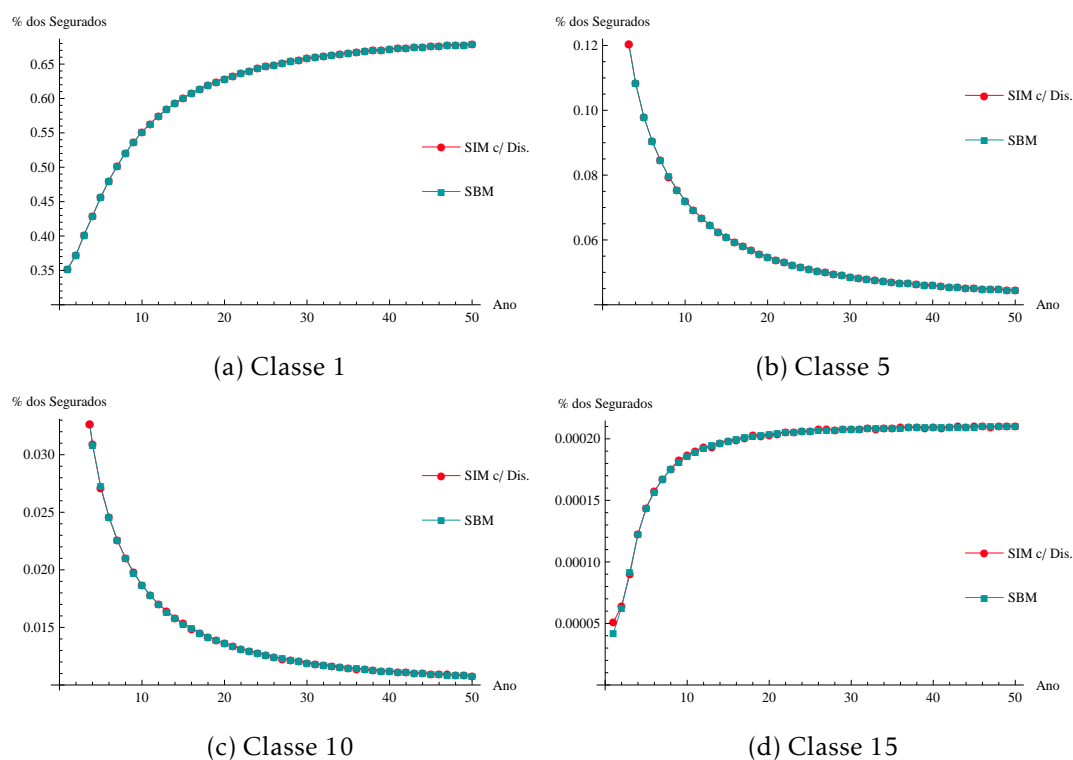


Figura 4.15: Evolução da percentagem de apólices - Classe 1, 5, 10 e 15 - Vórtices Estocásticos vs Simulação (com discretização)

A percentagem de apólices nas Classes 1, 5, 10 e 15 ao longo dos anos, obtida considerando o modelo de Simulação, é bastante próxima das percentagens obtidas considerando o modelo de Vórtices Estocásticos.

4.3.3 A Evolução do Prémio Médio

Na Figura 4.16 é possível comparar a evolução do prémio médio ao longo de 50 anos obtido anteriormente através do modelo de Vórtices Estocásticos com o obtido através do modelo de Simulação.

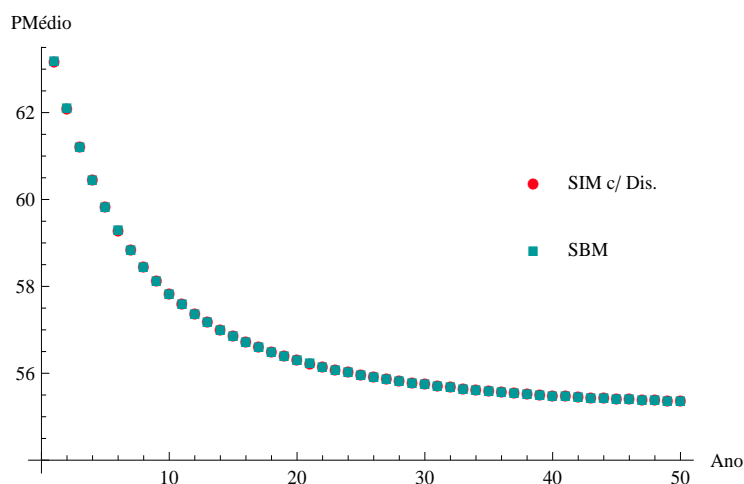


Figura 4.16: Evolução do Prémio Médio ao longo de 50 anos, em percentagem do Prémio Puro - Vórtices Estocásticos vs Simulação (com discretização)

Através da análise da Figura 4.16, é possível observar que o prémio médio obtido através do modelo de Simulação apresenta um comportamento semelhante ao obtido anteriormente considerando o modelo de Vórtices Estocásticos.

Conforme mencionado anteriormente, o Prémio Médio, ao fim de 242 anos, considerando o modelo de Vórtices Estocásticos é de 55,2069%. Ao fim de 50 anos, considerando o modelo de Simulação, o prémio médio é de 55,3748%, um valor próximo ao obtido para o modelo de Vórtices Estocásticos.

4.3.4 A Evolução do Prémio Total

Considere-se um Prémio Puro médio de 250 u.m.. Na Figura 4.17 é possível comparar a evolução do prémio total ao longo de 50 anos obtido anteriormente com a evolução obtida através do modelo de Simulação.

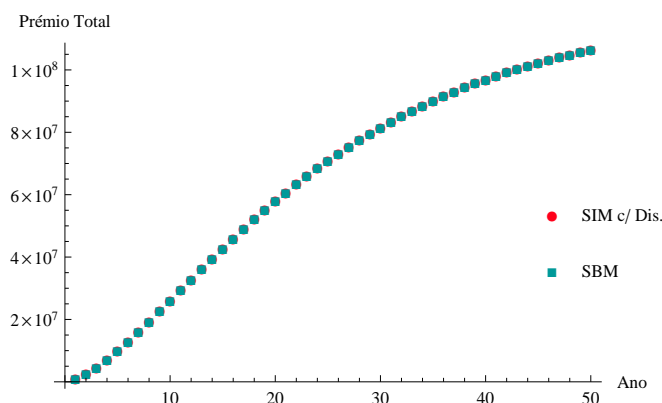


Figura 4.17: Evolução do Prémio Total ao longo de 50 anos - Vórtices Estocásticos vs Simulação (com discretização)

Observando a Figura 4.17 constata-se, novamente, que os resultados obtidos para o modelo de Simulação são bastante semelhantes aos obtidos para o modelo de Vórtices Estocásticos, tal como era pretendido.

4.3.5 As Escalas Ótimas de Prémios

Nesta secção serão apresentados os resultados obtidos para as escalas ótimas de prémios apresentadas no capítulo 2, considerando o modelo de Simulação aplicado aos pressupostos usados no modelo de Vórtices Estocásticos.

Na Tabela 4.16 encontram-se os resultados obtidos para as diferentes escalas através do modelo de Simulação.

Tabela 4.16: Escala Ótima de Norberg - modelo de Simulação (com discretização)

Classe	Escala de Norberg	Escala de Borgan	Escala de Gilde e Sundt	Escala de Andrade e Silva
1	54,64	74,03	61,28	60,23
2	82,50	89,53	65,58	63,72
3	91,59	99,05	69,88	67,41
4	88,22	92,85	74,18	71,32
5	91,43	96,77	78,49	75,45
6	105,12	107,74	82,79	79,82
7	104,63	107,06	87,09	84,45
8	114,12	111,43	91,40	89,34
9	99,63	99,46	95,70	94,52
10	100,00	100,00	100,00	100,00
11	206,36	218,44	104,30	105,80
12	223,29	237,05	108,61	111,93
13	264,12	298,47	112,91	118,41
14	280,05	310,27	117,21	125,28
15	300,06	343,75	121,51	132,54
16	306,25	342,75	125,82	140,22
17	319,36	359,55	130,12	148,34
18	339,40	382,12	134,42	156,94
19	366,95	424,82	138,72	166,03
20	403,70	461,80	143,03	175,66

Na Tabela 4.16, as escalas ótimas de prémios foram obtidas de forma análoga às obtidas na secção 4.2.5.

Na Figura 4.18 encontra-se uma comparação entre os prêmios obtidos para a diferentes escalas considerando os modelos de Vórtices Estocásticos e de Simulação.

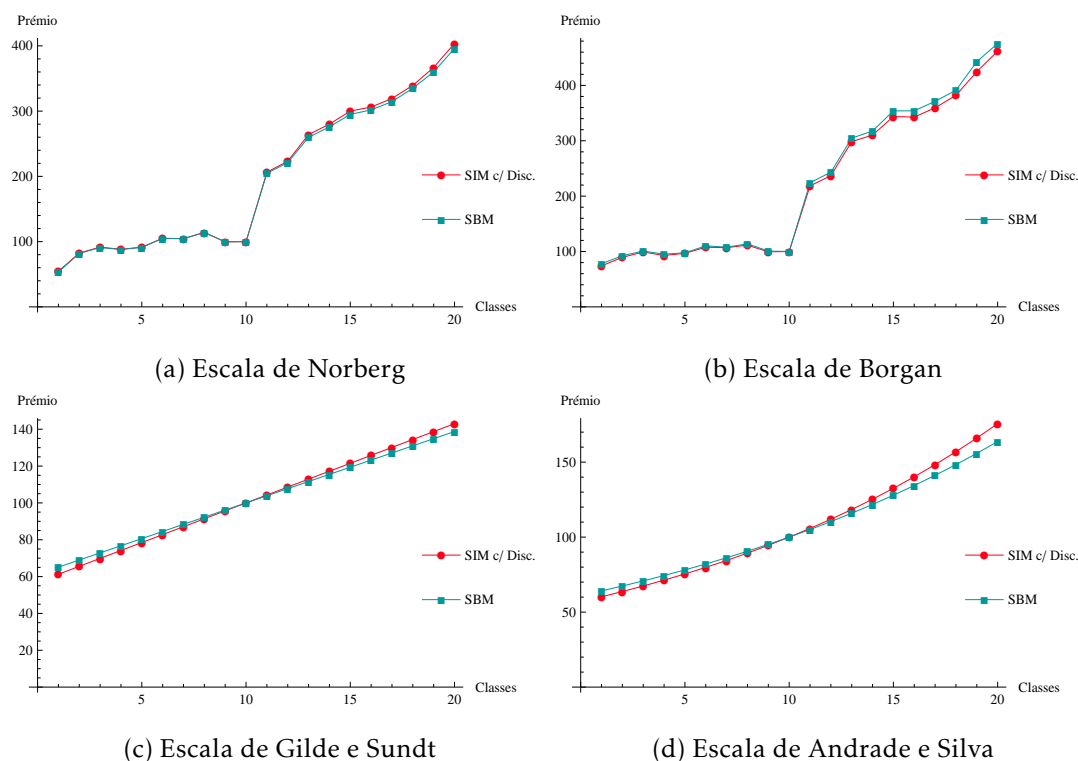


Figura 4.18: Comparação entre as diferentes escalas - Vórtices Estocásticos vs Simulação (com discretização)

Observando a Figura 4.18 constata-se que, para a escala de Norberg e Borgan, os resultados obtidos para o modelo de Simulação são bastante semelhantes aos obtidos para o modelo de Vórtices Estocásticos. Constata-se também que as maiores discrepâncias ocorrem nas classes onde são cobrados prêmios mais elevados.

Para a escala de Gilde e Sundt e Andrade e Silva, é possível verificar que os prêmios obtidos através do modelo de Simulação são inferiores aos obtidos através do modelo de Vórtices Estocásticos para as primeiras 10 classes do sistema. Nas restantes 10 classes, verifica-se o oposto. Embora tenham sido verificadas as discrepâncias mencionadas, estas não são significativas e, por isso, os prêmios obtidos considerando o modelo de Simulação são semelhantes aos obtidos anteriormente.

4.3.5.1 Análise das Escalas Ótimas de Prêmios

A Figura 4.19 permite comparar a escala comercial da Seguradora com as quatro escalas ótimas de prêmios estudadas anteriormente.

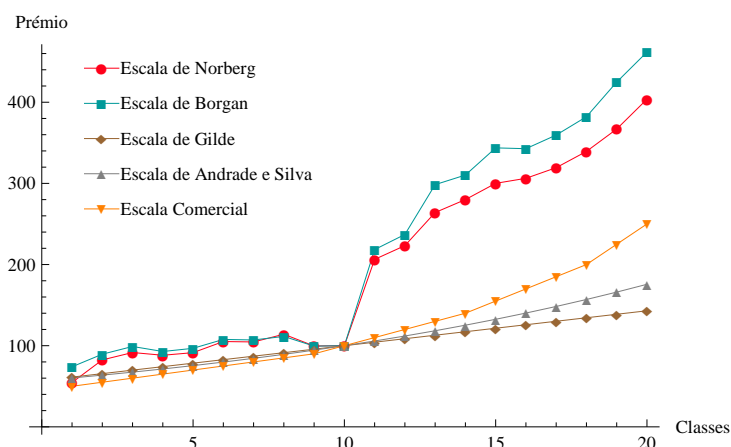


Figura 4.19: Comparação das Escalas de Prêmios obtidas através do modelo de Simulação

Uma vez que todas as escalas apresentaram resultados semelhantes aos obtidos através do modelo de Vórtices Estocásticos, as conclusões retiradas da Figura 4.19 são análogas às retiradas na secção 4.2.

Os resultados obtidos validam o modelo de Simulação quando aplicado aos pressupostos do modelo de Vórtices Estocásticos.

Na próxima secção serão apresentados os resultados do modelo de Simulação em que se consideram alguns cenários diferentes dos considerados no modelo de Vórtices Estocásticos.

4.4 O Modelo de Simulação - Estudo de Novos Cenários

Nesta secção serão apresentados os resultados do modelo de Simulação, abordando novos cenários que não são considerados no modelo de Vórtices Estocásticos. Assim, esta secção divide-se em 2 partes: na primeira serão apresentados os resultados do modelo de Simulação quando se relaxa a necessidade de discretizar a distribuição de estrutura, tal como referido no capítulo 3, e serão determinados os valores máximo e mínimo obtidos para alguns resultados importantes de SBM; na segunda parte serão considerados três cenários diferentes para as entradas no sistema, analisando o impacto que essa alteração no modelo de entrada pode causar.

4.4.1 O Modelo de Simulação sem Recurso à Discretização

4.4.1.1 A Distribuição Limite

A distribuição limite, tal como para o modelo anterior, é determinada calculando a percentagem de segurados em cada classe da carteira no ano 50.

Na Figura 4.20 encontra-se uma comparação entre as distribuições limite obtidas considerando os modelos de Vórtices Estocásticos e de Simulação. Os valores obtidos podem ser consultados na Tabela C.1, no apêndice C.

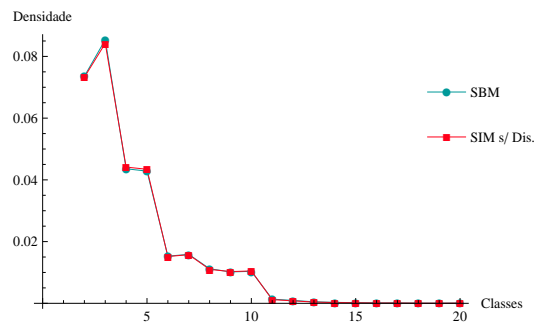


Figura 4.20: Comparação entre as Distribuições Limites obtidas - SBM e Simulação (sem discretização)

Através da análise da Figura 4.20, é possível observar que este novo modelo de Simulação apresenta resultados ainda mais semelhantes aos obtidos no modelo de Vórtices Estocásticos, quando comparado com o modelo de Simulação anterior.

Uma vantagem da Simulação é permitir, facilmente, a obtenção dos valores máximos e mínimos para a distribuição limite. Os valores obtidos podem ser consultados na tabela C.2, no apêndice C.

Na Figura 4.21 encontra-se uma comparação entre as amplitudes dos resultados obtidos para cada classe do sistema, considerando os modelos de Simulação com e sem discretização.

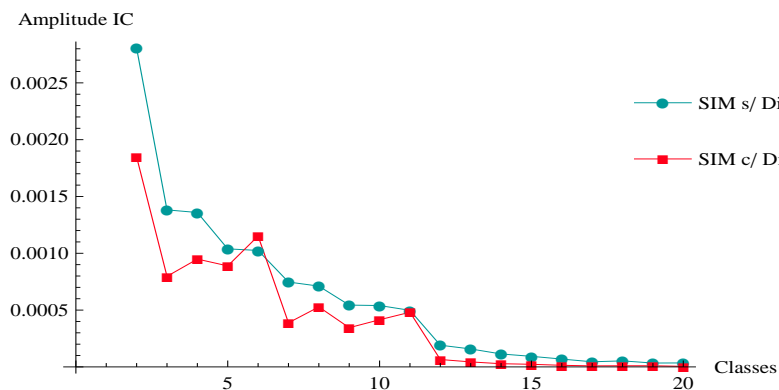


Figura 4.21: Comparação entre as Amplitudes obtidas para cada classe

Através da análise da Figura 4.21, é possível observar que, à exceção da Classe 6, a amplitude dos resultados obtidos através do modelo de Simulação em que se recorre à discretização é sempre inferior à amplitude dos valores obtidos sem recorrer à mesma. Tal pode dever-se ao facto de, na Simulação em que não se recorre à discretização da distribuição de estrutura, haver uma maior variabilidade das frequências de sinistralidade, uma vez que estas frequências podem tomar qualquer valor no suporte da distribuição Gama.

4.4.1.2 A Evolução da Percentagem de Apólices

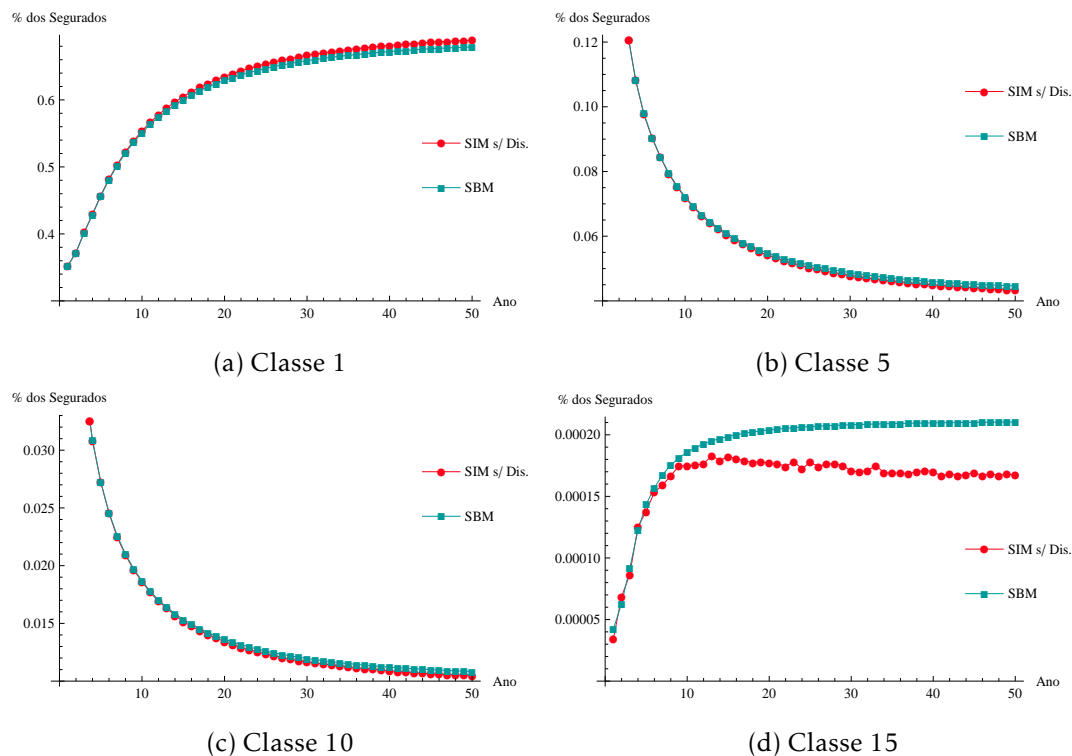


Figura 4.22: Evolução da percentagem de apólices - Classe 1, 5, 10 e 15 - Vórtices Estocásticos vs Simulação (sem discretização)

Através da Figura 4.22 é possível comparar a evolução da percentagem de apólices nas Classes 1, 5, 10 e 15 obtida considerando o modelo de Vórtices Estocásticos e considerando o modelo de Simulação em estudo.

Embora o comportamento observado seja semelhante, existem algumas discrepâncias nos valores obtidos. Por exemplo, neste modelo de Simulação a percentagem de segurados na primeira classe é ligeiramente superior à obtida através do modelo de Vórtices Estocásticos. Em contrapartida, a percentagem de segurados na Classe 15 obtida através do modelo de Simulação é inferior à obtida através do modelo de Vórtices Estocásticos. Estes resultados podem dever-se ao facto de nos modelos anteriores se considerar que existem sempre segurados com cada uma das frequências de sinistralidade consideradas na discretização da distribuição de estrutura, enquanto que neste modelo de Simulação não existe essa obrigatoriedade, uma vez que são retiradas ao acaso. Assim, como a probabilidade de obter frequências de sinistralidade elevadas é reduzida, podem ser poucas as apólices que se posicionam nas classes mais elevadas em comparação com os modelos anteriores.

4.4.1.3 A Evolução do Prémio Médio

Na Figura 4.23 é possível comparar a evolução do prémio médio ao longo de 50 anos obtido anteriormente através do modelo de Vórtices Estocásticos com o obtido através do modelo de Simulação em que não se considera a discretização.

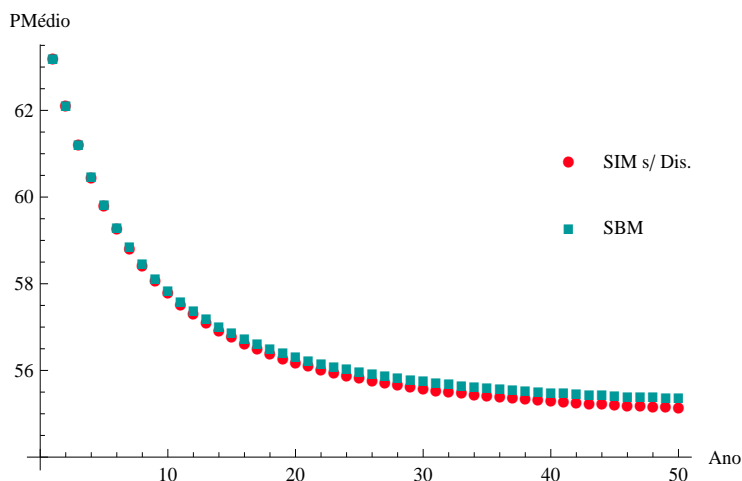


Figura 4.23: Evolução do Prémio Médio ao longo de 50 anos, em percentagem do Prémio Puro - Vórtices Estocásticos vs Simulação (sem discretização)

Através da análise da Figura 4.23, é possível observar que, para quase todos os anos de estudo, o prémio médio obtido através do modelo de Simulação sem recurso à discretização é inferior ao prémio médio obtido para o modelo de Vórtices Estocásticos.

Esse resultado já seria de esperar, uma vez que na secção anterior se verificou que a percentagem de apólices nas classes com agravamento no modelo de Simulação sem recurso à discretização é inferior aos restantes modelos estudados.

4.4.1.4 A Evolução do Prémio Total

Considere-se, novamente, um Prémio Puro médio de 250 u.m.. Na Figura 4.24 observa-se a evolução do prémio total ao longo de 50 anos obtido anteriormente, com a evolução obtida através do modelo de Simulação em estudo. Novamente os resultados obtidos para o modelo de Simulação são bastante semelhantes aos obtidos para o modelo de Vórtices Estocásticos.

No apêndice D encontra-se a tabela D.1 onde são apresentados os valores máximo e mínimo obtidos para o prémio total ao longo de 50 anos para o modelo de Simulação com ou sem recurso à discretização.

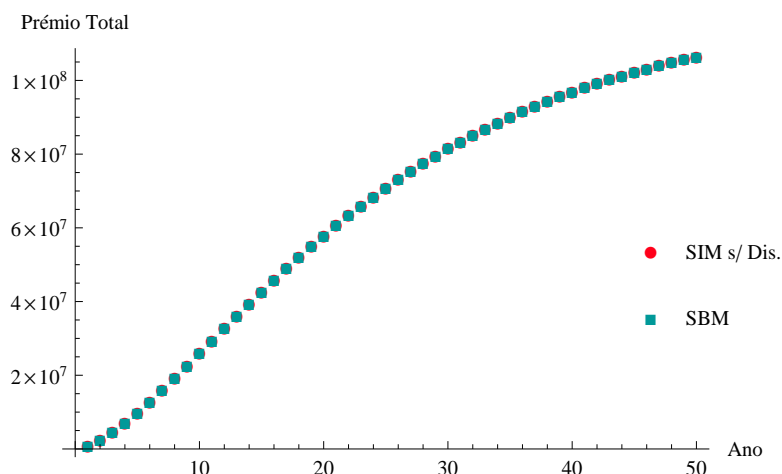


Figura 4.24: Evolução do Prémio Total ao longo de 50 anos - Vórtices Estocásticos vs Simulação (sem discretização)

Na Figura 4.25 encontra-se uma comparação entre as amplitudes dos resultados obtidos para cada um dos 50 anos.

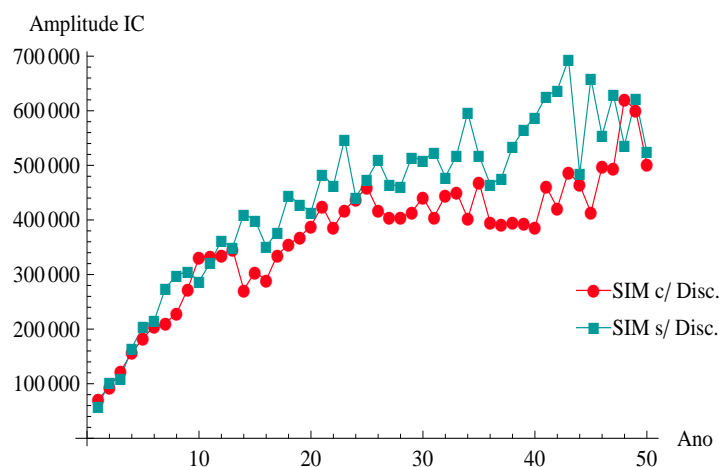


Figura 4.25: Comparação entre as Amplitudes obtidas para cada ano

Observa-se que, geralmente, que as amplitudes obtidas através do modelo de Simulação em que se recorre à discretização são inferiores às amplitudes obtidas sem recorrer à mesma, tal como já tinha sido constatado anteriormente.

4.4.1.5 As Escalas Ótimas de Prémios

Nesta secção serão apresentados os resultados obtidos para as escalas ótimas de prémios apresentadas no capítulo 2, considerando o modelo de Simulação em que não se discretiza a distribuição de estrutura.

4.4.1.5.1 A Escala de Norberg Para o caso em que não se considera a discretização da distribuição de estrutura, a escala ótima de prémios proposta por Norberg (1976) pode ser determinada através da resolução do problema (4.8). A utilização do problema (4.8) para a determinação da escala de Norberg prende-se com o facto de se pretender minimizar (2.18) e, neste modelo, não se possui as informações necessárias para cada frequência de sinistralidade.

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar } \sum_j |e_j - b_j| \\
 &\text{Sujeito a } b_j \geq \epsilon \text{ em que } \epsilon \text{ suficientemente próximo de } 0 \\
 &\quad \sum_i \lambda_i^j \\
 &\quad e_j = \frac{\sum_i \lambda_i^j}{|j|} \text{ (frequência média da classe } j) \\
 &\quad \lambda_i^j = 0 \text{ caso o segurado } i \text{ não se encontre na classe } j
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Os prémios obtidos para a escala de Norberg considerando o modelo de Simulação sem discretização encontram-se na tabela C.3.

Na Figura 4.26 encontra-se uma comparação entre os prémios obtidos para a escala de Norberg considerando o modelo de Vórtices Estocásticos e o modelo de Simulação em que não se considera a discretização da distribuição de estrutura.

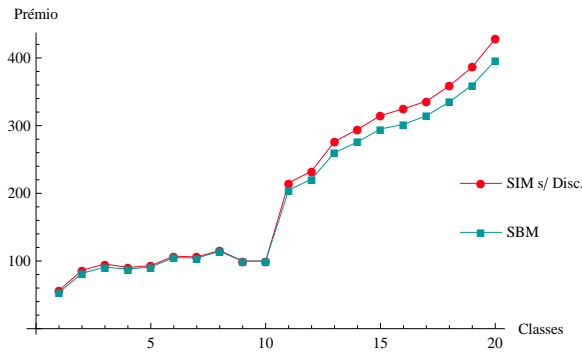


Figura 4.26: Escala de Norberg - Vórtices Estocásticos vs Simulação (sem discretização)

Através da Figura 4.26 é possível verificar que a partir da Classe 11, a escala de Norberg obtida através deste modelo de Simulação apresenta prémios superiores aos obtidos anteriormente.

Na Figura 4.27 e na Tabela C.4 encontram-se representados os valores máximo e mínimo obtidos para as escalas de Norberg conseguidas através de Simulação.

4.4. O MODELO DE SIMULAÇÃO - ESTUDO DE NOVOS CENÁRIOS

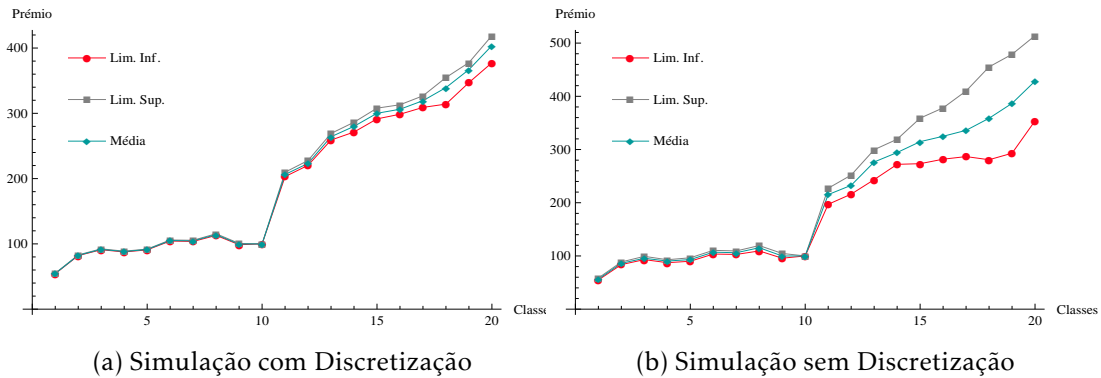


Figura 4.27: Amplitude dos resultados obtidos para a Escala de Norberg

Através da análise da Figura 4.27 e da Tabela C.4, é possível concluir que a variabilidade associada aos modelos de Simulação da escala de Norberg a partir da Classe 11 é grande. É de notar, novamente, que a variabilidade associada ao modelo de Simulação sem recorrer à discretização da distribuição de estrutura é superior à variabilidade associada ao modelo de Simulação com discretização.

4.4.1.5.2 A Escala de Borgan, Hoem e Norberg Após definidos os ponderadores e determinada a distribuição ponderada, para o caso em que não se considera a discretização da distribuição de estrutura, a escala ótima de prémios proposta por Borgan et al. (1981) pode ser determinada através do problema de minimização (4.9) em que cada $Q_n(S)$ se obtém de forma análoga a (4.8).

$$\text{Minimizar } w_1 Q_1(S) + w_2 Q_2(S) + \dots + w_{20} Q_{20}(S) \quad (4.9)$$

Na Tabela C.5 encontram-se os prémios obtidos para a escala de Borgan, Hoem e Norberg através do modelo de Simulação sem discretização.

Na Figura 4.28 encontra-se uma comparação entre os prémios obtidos para a escala de Borgan, Hoem e Norberg considerando o modelo de Vórtices Estocásticos e considerando este modelo de Simulação.

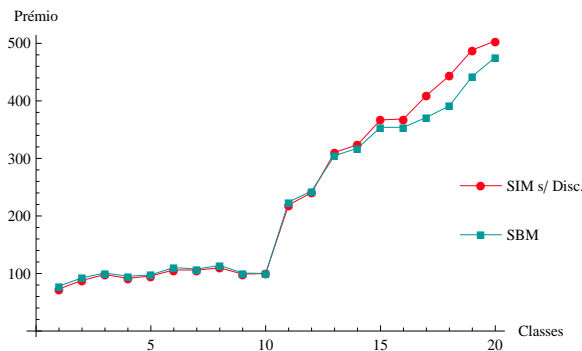


Figura 4.28: Escala de Borgan - Vórtices Estocásticos vs Simulação (sem discretização)

Da análise da Figura 4.28, uma conclusão análoga à da Escala de Norberg pode ser retirada.

Na Figura 4.29 e na Tabela C.6 encontram-se representados os valores máximo e mínimo obtidos para as escalas de Borgan obtidas através de Simulação.

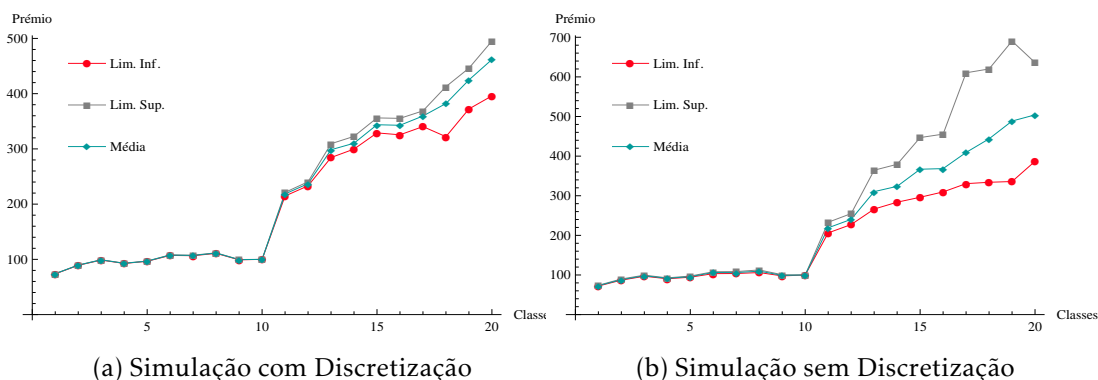


Figura 4.29: Amplitude dos resultados obtidos para a Escala de Borgan

Conclusões análogas às da Escala de Norberg podem ser retiradas.

4.4.1.5.3 A Escala de Gilde e Sundt A escala de Gilde e Sundt apresentada em seguida foi obtida linearizando a respectiva escala ótima de Borgan, Hoem e Norberg.

Os resultados obtidos para a escala ótima de Gilde e Sundt encontram-se na Tabela C.7 do apêndice C.

Na Figura 4.30 encontra-se uma comparação entre os prêmios obtidos para a escala de Gilde e Sundt considerando o modelo de Vórtices Estocásticos e considerando este modelo de Simulação.

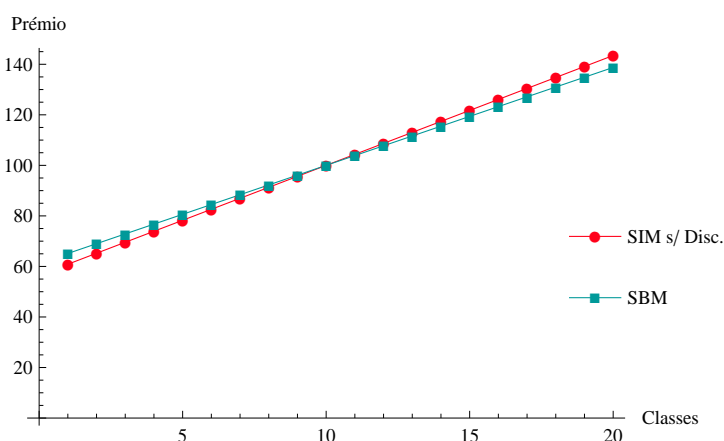


Figura 4.30: Escala de Gilde - Vórtices Estocásticos vs Simulação (sem discretização)

Na Figura 4.31 e na Tabela C.8 encontram-se representados os valores máximo e mínimo obtidos para as escalas de Gilde e Sundt obtidas através de Simulação.

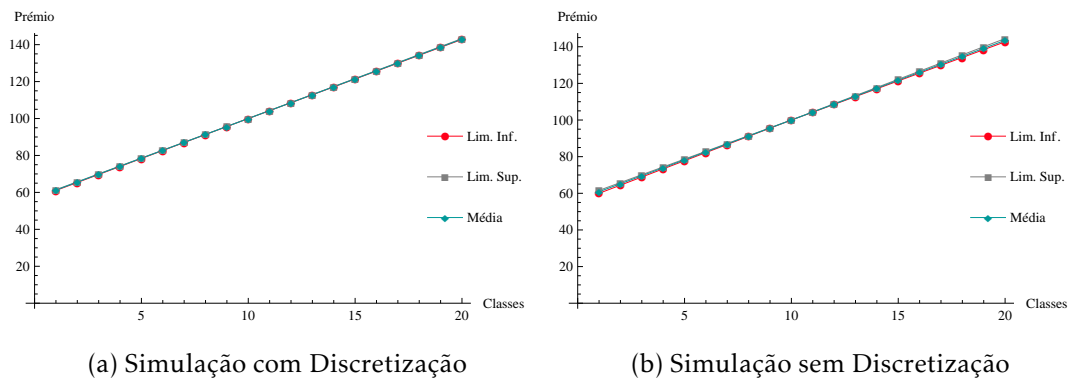


Figura 4.31: Amplitude dos resultados obtidos para a Escala de Gilde

É de observar, através da Figura 4.30 que, embora no modelo de Vórtices Estocásticos o prêmio correspondente à Classe 1 do sistema seja superior ao considerado no modelo de Simulação, o declive da reta do modelo de Vórtices Estocásticos é inferior ao declive da reta do modelo de Simulação. Observando a Figura 4.31 conclui-se que para esta escala não existe grande variabilidade dos prêmios obtidos.

4.4.1.5.4 A Escala de Andrade e Silva À semelhança da escala de Gilde e Sundt, a escala de Andrade e Silva apresentada em seguida foi obtida com base na respetiva escala ótima de Borgan, Hoem e Norberg.

Os resultados obtidos para a escala ótima de Andrade e Silva, considerando o modelo de Simulação em que não se discretiza a distribuição de estrutura, encontram-se na Tabela C.9.

Na Figura 4.32 encontra-se uma comparação entre os prêmios obtidos para a Escala de Andrade e Silva considerando o modelo de Vórtices Estocásticos e considerando este modelo de Simulação.

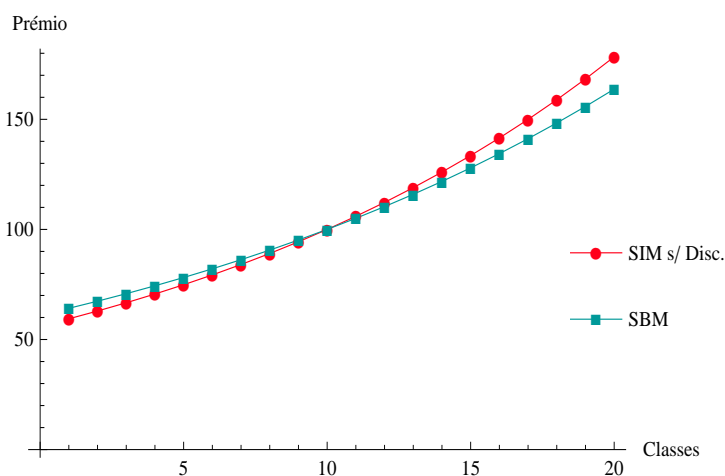


Figura 4.32: Escala de Andrade e Silva - Vórtices Estocásticos vs Simulação (sem discretização)

Na Figura 4.33 e na Tabela C.10 encontram-se representados os valores máximo e mínimo obtidos para as escalas de Andrade e Silva obtidas através de Simulação.

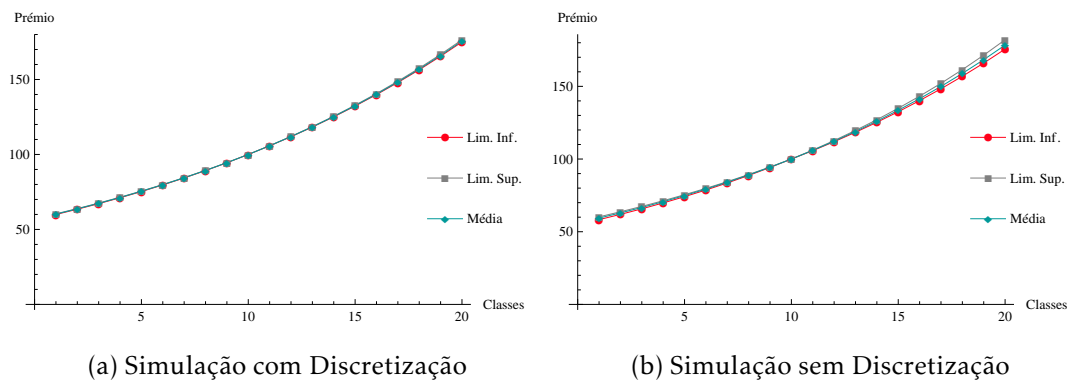


Figura 4.33: Amplitude dos resultados obtidos para a Escala de Andrade e Silva

O modelo de Vórtices Estocásticos prevê um prémio superior para as classes mais baixas e um prémio inferior para as classes mais altas quando comparado com os resultados obtidos através do modelo de Simulação. Não existe grande variabilidade para esta escala.

4.4.1.5.5 Análise das Escalas Ótimas de Prémios A Figura 4.34 permite comparar a escala comercial da Seguradora com as quatro escalas ótimas de prémios estudadas considerando este modelo de Simulação.

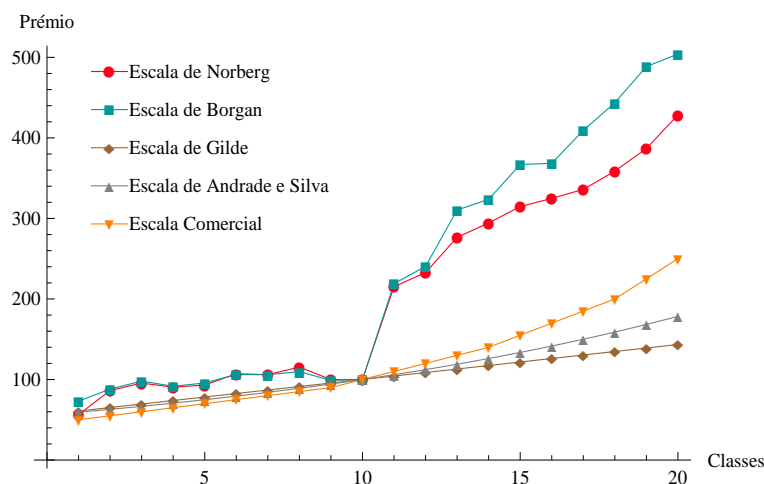


Figura 4.34: Comparação das Escalas de Prémios - modelo de Simulação (sem discretização)

Uma vez que as diferenças obtidas para as escalas não são muito significativas, considerando o modelo de Simulação em estudo, as conclusões retiradas da Figura 4.34 são análogas às retiradas na secção 4.2 e 4.3.

4.4.2 O Modelo de Simulação com Entradas Geométrica

Com vista a estudar o impacto que uma alteração no modelo de entradas apresentado na secção 2.3.4 pode causar no sistema, considerou-se a hipótese de o número de segurados a entrar para o sistema no ano i seguia uma distribuição Geométrica.

A Simulação foi efetuada com recurso à discretização da distribuição de estrutura, uma vez que no estudo anterior apresentou resultados mais próximos do modelo de Vórtices Estocásticos.

Os resultados obtidos e uma análise dos mesmos serão apresentados em seguida.

4.4.2.1 As Entradas no Sistema

Seja X a variável aleatória que representa o número de insucessos até à obtenção de um sucesso e p a probabilidade de ocorrer um sucesso. X tem distribuição Geométrica com parâmetro p , isto é, $X \sim G(p)$.

No contexto desta dissertação, pretende-se obter o número de segurados a entrar para o sistema no i através de uma variável aleatória Geométrica com parâmetro correspondente à quota de mercado desse ano e do número total de apólices no mercado Segurador.

Na Tabela 4.17 apresenta-se o número total de apólices no mercado de 1997 a 2015.

Tabela 4.17: Número Total de Apólices (1997 a 2015) - **Fonte:** Estimativa elaborada pelo autor

Ano i	Número de Apólices
1997	5.500.000
1998	4.750.000
1999	4.500.000
2000	4.200.000
2001	3.815.000
2002	6.954.000
2003	5.650.000
2004	4.140.066
2005	4.786.009
2006	3.907.107
2007	5.044.864
2008	5.071.144
2009	5.209.111
2010	4.770.898
2011	4.689.545
2012	4.521.352
2013	4.596.623
2014	5.484.422
2015	6.344.733

Ajustando um Modelo de Ajustamento Assimptótico, por forma a prever o número total de segurados no mercado Segurador nos anos seguintes, com $\tau = 7.500.000$ fixo, obteve-se $\hat{\delta} = 0,688933$ e, portanto, o modelo adotado para o número total de apólices no mercado Segurador é dado por (4.10).

$$\vartheta_i = 7.500.000(1 - e^{-0,688933i}), i \in \mathbb{N} \quad (4.10)$$

e pode ser observado na Figura 4.35.

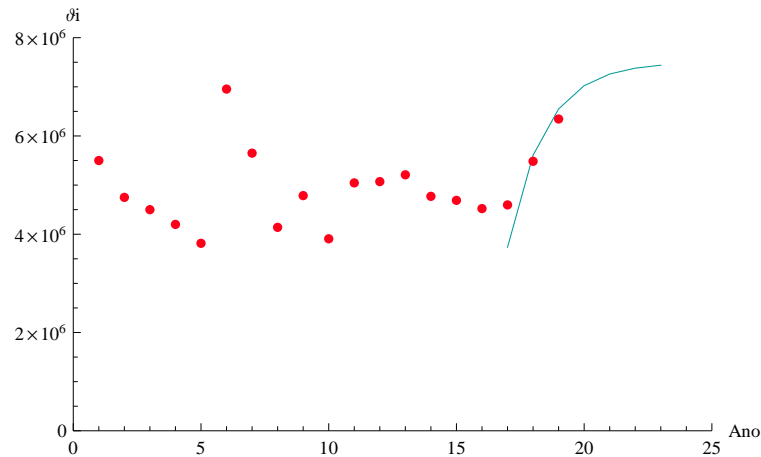


Figura 4.35: Número de segurados no mercado Segurador por ano

Na Tabela 4.18 apresenta-se as quotas de mercado da Seguradora de 1997 a 2015.

Tabela 4.18: Quota de Mercado da Seguradora (1997 a 2015)

Ano i	Quota de Mercado
1997	0,0007
1998	0,0020
1999	0,0035
2000	0,0053
2001	0,0077
2002	0,0050
2003	0,0070
2004	0,0080
2005	0,0110
2006	0,0120
2007	0,0120
2008	0,0100
2009	0,0100
2010	0,0090
2011	0,0070
2012	0,0050
2013	0,0050
2014	0,0050
2015	0,0070

Considerar-se-ão três cenários diferentes para o modelo da quota de mercado da Seguradora. Os três cenários são:

- **Cenário Positivo:** Crescimento Assíntótico com assíntota em $\tau = 0,02$

- **Cenário Moderado:** Crescimento Assimptótico com assímtota em $\tau = 0,011$
- **Cenário Negativo:** Decrescimento Exponencial com assímtota em $0,002$

4.4.2.1.1 Cenário Positivo Ajustando um Modelo de Ajustamento Assimptótico, por forma a prever a quota de mercado dos anos seguintes, com $\tau = 0,02$ fixo, obteve-se $\hat{\delta} = 0,193893$ e, portanto, o modelo adotado para a quota de mercado é dado por (4.11).

$$\vartheta_i = 0,02(1 - e^{-0,193893i}), \quad i \in \mathbb{N} \quad (4.11)$$

e pode ser observado na Figura 4.36.

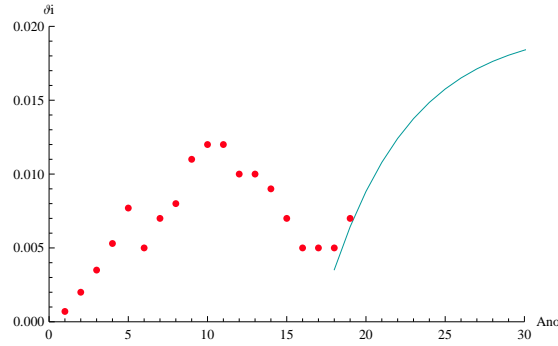


Figura 4.36: Quota de Mercado por ano - Cenário Positivo

4.4.2.2 Cenário Moderado

Ajustando um Modelo de Ajustamento Assimptótico, por forma a prever a quota de mercado dos anos seguintes, com $\tau = 0,011$ fixo, obteve-se $\hat{\delta} = 0,379886$ e, portanto, o modelo adotado para a quota de mercado é dado por (4.12).

$$\vartheta_i = 0,011(1 - e^{-0,379886i}), \quad i \in \mathbb{N} \quad (4.12)$$

e pode ser observado na Figura 4.37.

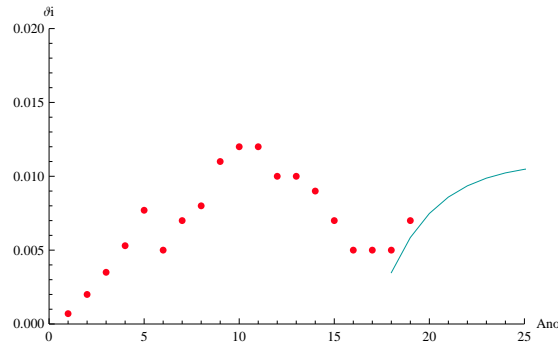


Figura 4.37: Quota de Mercado por ano - Cenário Moderado

4.4.2.2.1 Cenário Negativo Ajustando um Modelo Exponencial do tipo $\vartheta_i = \theta \cdot r^i + 0,002$, por forma a prever a quota de mercado dos anos seguintes, com assíptota em 0,002, obteve-se $\hat{\theta} = 0,007618$ e $\hat{r} = 0,843304$ e, portanto, o modelo adotado para a quota de mercado é dado por (4.13).

$$\vartheta_i = 0,007618 \times 0,843304^i + 0,002, \quad i \in \mathbb{N} \quad (4.13)$$

e pode ser observado na Figura 4.38.

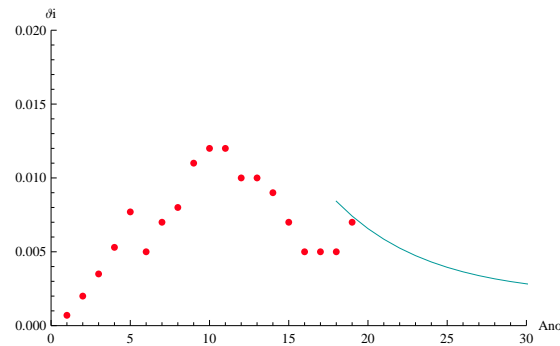
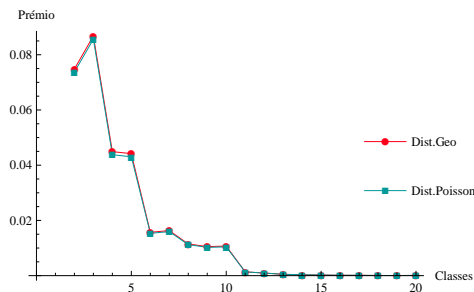
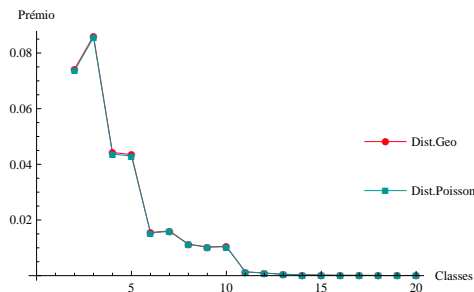


Figura 4.38: Quota de Mercado por ano - Cenário Negativo

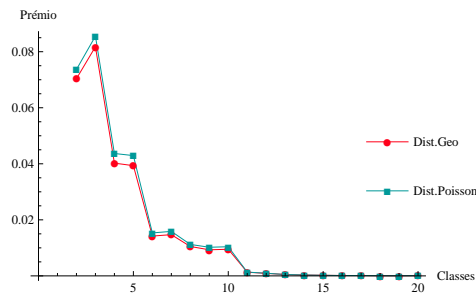
4.4.2.3 A Distribuição Limite



(a) Cenário Positivo



(b) Cenário Moderado



(c) Cenário Negativo

Figura 4.39: Comparação entre as Distribuições Limites obtidas - Poisson e Geométrica

Na Figura 4.39 encontra-se uma comparação entre as distribuições limite obtidas considerando para o modelo de entradas a distribuição Poisson e considerando a distribuição Geométrica. É possível concluir que, para o caso em que se considera um cenário positivo ou um cenário moderado, a distribuição limite encontrada é bastante semelhante à obtida através do modelo de Vórtices Estocásticos.

Para o caso em que se considera um cenário negativo, o comportamento da distribuição limite encontrada é semelhante ao comportamento da distribuição limite obtida através do modelo de Vórtices Estocásticos mas apresenta valores ligeiramente inferiores. Tal acontecimento pode dever-se ao decréscimo da quota de mercado.

4.4.2.4 A Evolução da Percentagem de Apólices

Nas Figuras 4.40, 4.41 e 4.42 encontra-se uma comparação entre a evolução da percentagem de apólices nas Classes 1, 5, 10 e 15 considerando para o modelo de entradas a distribuição Poisson e considerando a distribuição Geométrica.

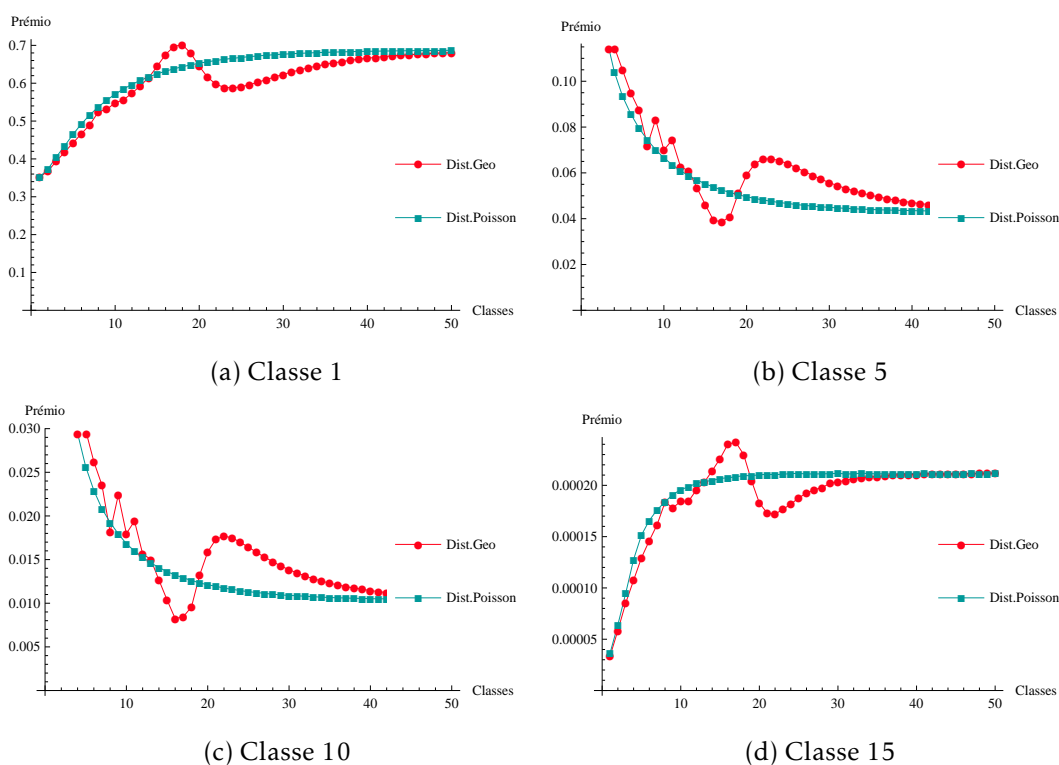


Figura 4.40: Evolução da percentagem de apólices - Classe 1, 5, 10 e 15 - Poisson e Geométrica - Cenário Positivo

Observando a Figura 4.40 conclui-se que, considerando um cenário positivo, a evolução da percentagem de apólices, quando se admite a distribuição Geométrica para o modelo de entradas, não apresenta um comportamento semelhante ao obtido para a distribuição Poisson. Embora o comportamento não seja semelhante, a longo prazo, a distribuição das apólices é idêntica pelo que se pode concluir que uma alteração no modelo

de entradas, a longo prazo, não causa impacto na distribuição das apólices pelas classes do sistema, tendo, no entanto impacto a médio prazo.

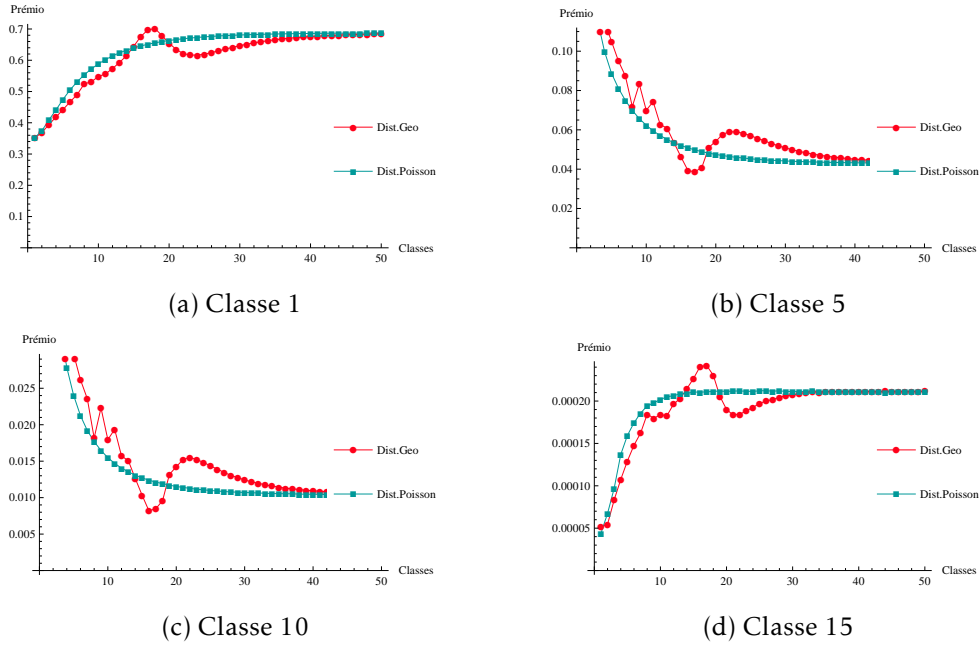


Figura 4.41: Evolução da percentagem de apólices - Classe 1, 5, 10 e 15 - Poisson e Geométrica - Cenário Moderado

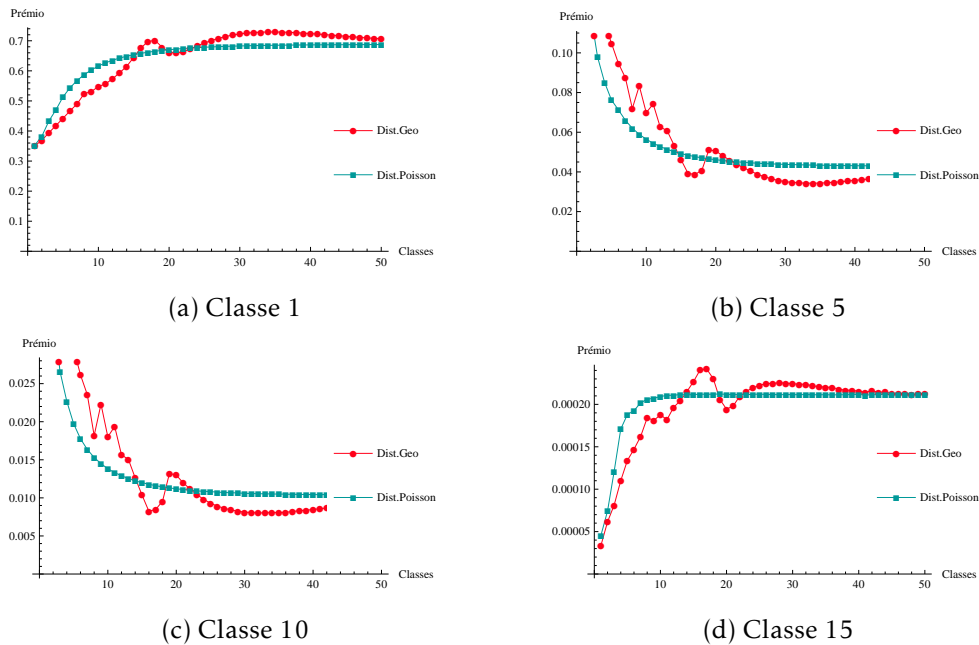


Figura 4.42: Evolução da percentagem de apólices - Classe 1, 5, 10 e 15 - Poisson e Geométrica - Cenário Negativo

Observando as Figuras 4.41 e 4.42, que representam a evolução da percentagem de apólices nas Classes 1, 5, 10 e 15 considerando um cenário moderado e um cenário negativo, respetivamente, é possível retirar uma conclusão análoga à do cenário positivo.

4.4.2.5 A Evolução do Prémio Médio

Na Figura 4.43 encontra-se uma comparação entre a evolução do prémio médio ao longo de 50 anos considerando para o modelo de entradas a distribuição Poisson e considerando a distribuição Geométrica.

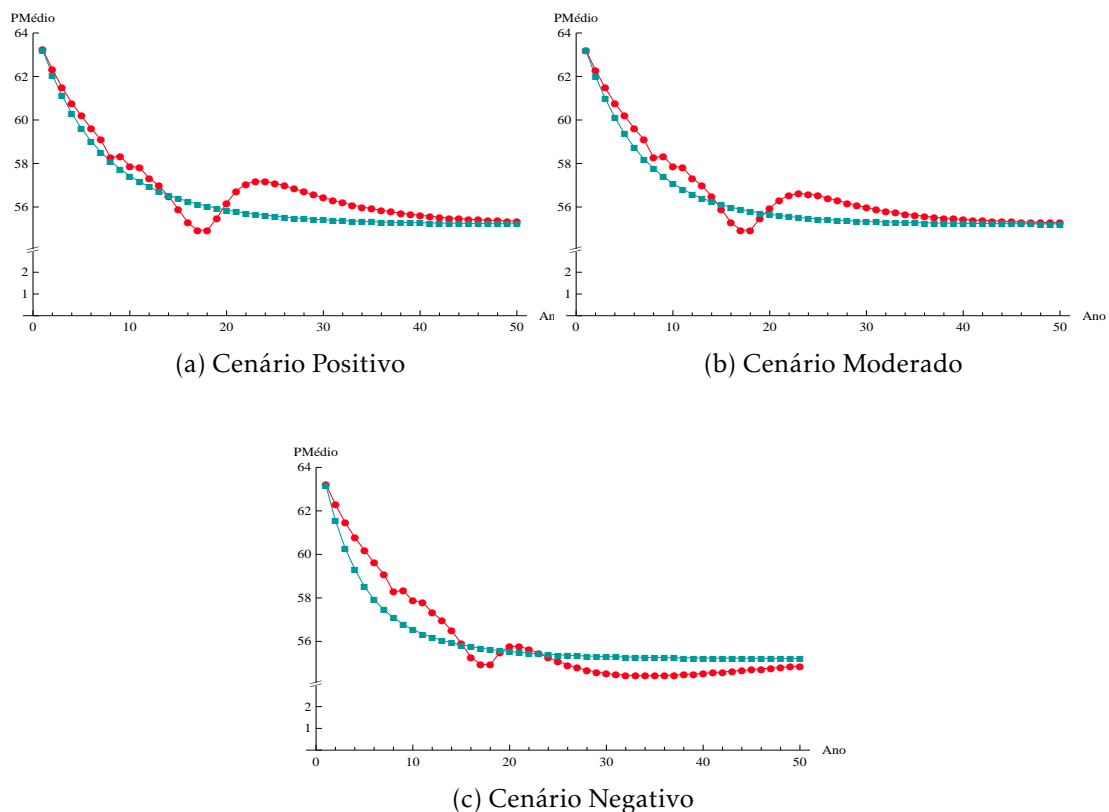


Figura 4.43: Evolução do Prémio Médio - Poisson e Geométrica

As irregularidades encontradas entre o ano 10 e o ano 20 são explicadas pelo comportamento irregular da quota de mercado nesses anos. Ao fim de 50 anos o prémio médio observado para o cenário positivo e moderado é próximo do observado para o caso em que se considera a distribuição Poisson. Quanto ao cenário negativo, o prémio médio obtido, a longo prazo, é ligeiramente inferior ao observado com a distribuição Poisson, refletindo o decréscimo da quota de mercado.

4.4.2.6 A Evolução do Prémio Total

Na Figura 4.44 encontra-se uma comparação entre a evolução do prémio total ao longo de 50 anos considerando para o modelo de entradas a distribuição Poisson e considerando a distribuição Geométrica. Para o cálculo do prémio total foi considerado um prémio puro médio de 250 u.m. e a escala de prémios da Seguradora.

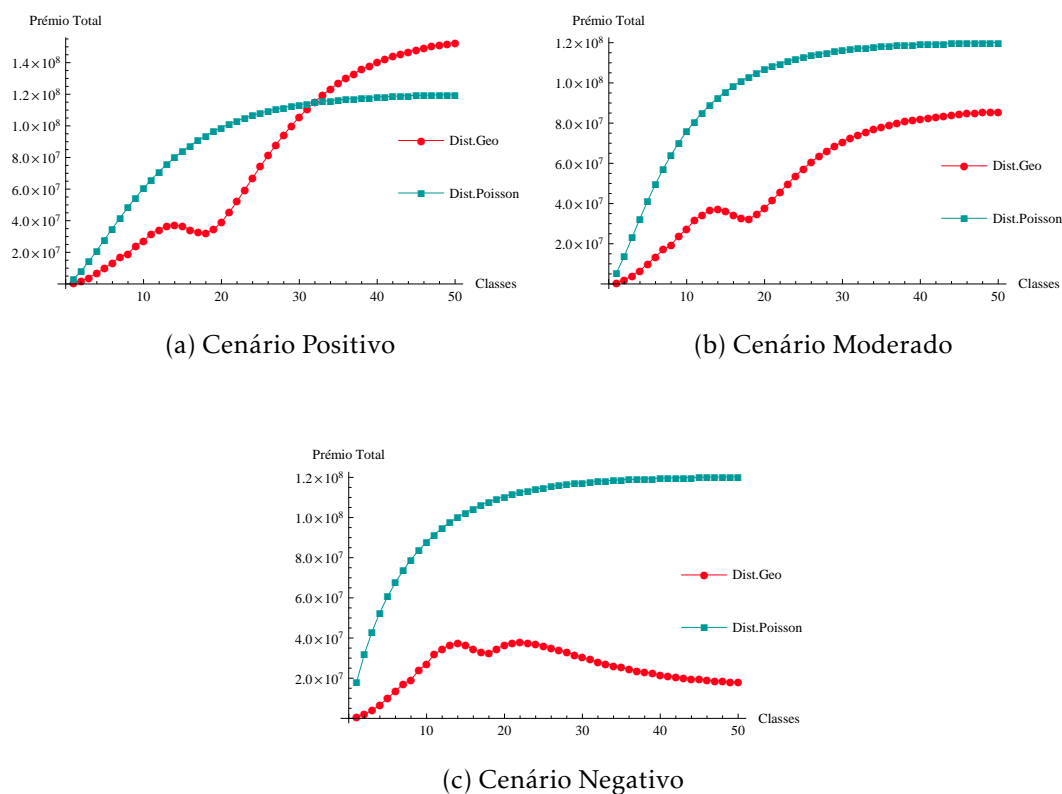


Figura 4.44: Evolução do Prémio Total - Poisson e Geométrica

Embora a percentagem de apólices em cada classe, a longo prazo, seja semelhante para o caso em que se considera a distribuição Poisson e para o caso em que se considera a distribuição Geométrica tal não acontece com o prémio total da carteira. Este resultado já seria de esperar uma vez que uma percentagem semelhante não implica um número de segurados em cada classe semelhante, e este último influencia o prémio total da carteira.

No cenário negativo, com a tendência decrescente do prémio total da carteira existe um maior risco da seguradora entrar em insolvência.

4.4.2.7 As Escalas Ótimas de Prémios

Foram analisadas as escalas ótimas de prémios para o caso em que se considera a distribuição Geométrica para as entradas no sistema no entanto, devido à parença dos resultados com os já apresentados optou-se por omitir os mesmos.

No apêndice E apresentam-se as amplitudes obtidas para o modelo em que se considera a distribuição Geométrica para o modelo de entradas.

4.5 Considerações Finais

4.5.1 O Modelo de Simulação (com e sem discretização)

A distribuição limite, a evolução do prémio médio e a evolução do prémio total da carteira obtidos através do modelo de Vórtices Estocásticos são semelhantes aos obtidos através do modelo de Simulação independentemente de se ter considerado ou não a discretização.

A evolução das Classes 1, 5 e 10 tem um comportamento semelhante nos modelos analisados. Já para a Classe 15, uma vez que é uma classe onde se esperam poucos seguros, o comportamento do modelo de Simulação onde não se considerou a discretização da distribuição de estrutura é diferente do esperado pelo modelo de Vórtices Estocásticos.

A amplitude dos resultados obtidos para o modelo de Simulação sem recorrer à discretização é sempre superior à amplitude dos resultados obtidos para o modelo de Simulação com recurso à discretização. Tal facto deve-se à utilização de apenas cem pontos da distribuição Gama na Simulação com recurso à discretização enquanto que na outra Simulação é considerado todo o suporte da distribuição Gama.

Na análise das Escalas de Prémios Ótimas obtidas conclui-se que as maiores discrepâncias encontram-se nas classes mais altas do sistema, as classes onde são esperadas menos apólices.

Apesar dos resultados obtidos para o modelo de Simulação onde se considera a discretização da distribuição de estrutura serem mais próximos do modelo de Vórtices Estocásticos, o modelo em que não se considera a discretização é mais realista e representa a volatilidade de uma carteira automóvel.

4.5.2 O Modelo de Simulação com Entradas Geométricas

Considerando um cenário positivo, a distribuição limite obtida através do modelo de Vórtices Estocásticos, isto é, considerando a distribuição Poisson para o modelo de entradas, é semelhante à distribuição limite obtida simulando uma carteira de seguro automóvel em que se considera a distribuição Geométrica para o modelo de entradas.

A evolução da percentagem de apólices e a evolução do prémio médio embora apresentem um comportamento distinto do obtido com a distribuição Poisson, a longo prazo convergem para valores semelhantes. O prémio total da carteira observado para este cenário tem tendência a ser superior ao prémio total de uma carteira com entradas Poisson, tal deve-se ao otimismo na previsão da evolução da quota de mercado. Na análise das Escalas Ótimas de Prémios conclui-se que esta visão otimista não provoca muitas alterações nas escalas ótimas de prémios de Norberg e Borgan, Hoem e Norberg, ao contrário do que acontece com as escalas de Gilde e Sundt e Andrade e Silva.

Considerando um cenário moderadamente otimista, as conclusões retiradas para a distribuição limite, para a evolução do prémio médio e para a evolução da percentagem de apólices são idênticas às de um cenário positivo. O prémio total da carteira observado para este cenário é inferior ao observado com o modelo de Vórtices Estocásticos. As conclusões retiradas da análise das escalas ótimas de prémios obtidas são idênticas às obtidas considerando um cenário positivo.

Ao considerar uma visão pessimista, apenas a escala ótima de Borgan, Hoem e Norberg apresenta resultados semelhantes aos obtidos considerando a distribuição Poisson.

CONCLUSÃO

O objetivo desta dissertação era estudar um SBM sob a perspectiva de uma carteira aberta e evidenciar algumas vantagens da utilização de técnicas de Simulação para a obtenção de resultados importantes para a modelação de SBM.

Os resultados obtidos permitiram concluir que existe uma grande semelhança entre os valores estimados e os simulados. No entanto, é necessário ter em conta os pressupostos assumidos, pois quanto mais pressupostos utilizados na simulação forem comuns aos assumidos no modelo de Vórtices Estocásticos resultados mais semelhantes se obterão. Nesta dissertação foi considerado, em todos os modelos, que o modelo Poisson-Gama era o que mais se adequava para a modelação do número de sinistros mas, numa das Simulações, não se discretizou a distribuição de estrutura, uma vez que na Simulação não há essa necessidade. Ambas as Simulações apresentaram, em geral, bons resultados e, por isso, ficou demonstrado que a Simulação consegue reproduzir o modelo de Vórtices Estocásticos e ainda permite estudar alguns cenários não considerados nesse modelo, de forma simples.

Ao considerar outra distribuição para o modelo de entradas concluiu-se que não existe grande impacto a longo prazo, ou seja, os resultados obtidos, apesar de apresentarem um comportamento diferente, a longo prazo convergiram para os resultados obtidos com o modelo de Vórtices Estocásticos.

Nesta dissertação optou-se por não se indicar a melhor das escalas ótimas, uma vez que não era o foco deste projeto e teria de se ter em conta outros aspetos que não foram abordados.

Nem todos os *softwares* matemáticos se revelaram adequados para simular uma carteira com um grande volume de apólices, uma vez que cada corrida se revelou muito demorada e se pretendiam realizar cem corridas a fim de obter resultados mais precisos.

Com esta dissertação foram encontradas diversas vantagens da utilização da simulação para recriar a realidade tais como: encontrar, de forma simples, os valores máximo e mínimo obtidos para a distribuição anual da carteira, para o prémio total anual e para as escalas de prémios; não utilizar apenas valores médios nos cálculos efetuados permitindo representar melhor a realidade e prever situações financeiras menos favoráveis; relaxar algumas hipóteses consideradas no modelo de Vórtices Estocásticos e determinar o seu impacto; estimar o número de sinistros futuro da carteira e de cada segurado.

Como trabalho futuro, este estudo poderia ser estendido tendo em conta a severidade dos sinistros na aplicação dos SBM. Esta abordagem seria mais complexa do ponto de vista matemático mas é menos usual pelo que seria interessante o seu estudo.

BIBLIOGRAFIA

- Afonso, L.B., R. Cardoso, A.D. Egídio dos Reis e G.R. Guerreiro (2016). “The impact of Bonus Malus Systems in finite and continuous time ruin probabilities in motor insurance considering an open versus a closed portfolio”. Em: *Apresentação no Congresso Astin Colloquium Lisboa 2016*.
- Andrade e Silva, J.M. (1988). *Sistemas de bonus/malus no seguro automóvel*. documentos. de trabalho nº97: CEMAPRE, Lisboa.
- Andrade e Silva, J.M. (1991). *Estruturas Tarifárias nos Ramos Reais da Indústria Seguradora - Uma aplicação ao sector automóvel em Portugal*. Instituto Superior de Economia e Gestão.
- Borgan, O., J. M. Hoem e R. Norberg (1981). “A Nonasymptotic Criterion for the Evaluation of Automobile Bonus Systems”. Em: *Scandinavian Actuarial Journal* 1981(3), pp. 165–178.
- Centeno, M. L. (2003). *Teoria do Risco na Actividade Seguradora*. Celta Editora.
- Centeno, M.L. e J.M. Andrade e Silva (2001). “Bonus systems in an open portfolio”. Em: *Insurance: Mathematics and Economics* 28(2001), pp. 341–350.
- Denuit, M. e J. Dhaene (2000). “Bonus-Malus Scales using Exponential Loss Functions”. Em: *Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik* 25, pp. 13–27.
- Esquivel, M.L., J.M. Fernandes e G.R. Guerreiro (2014). “On the evolution and asymptotic analysis of open markov populations: application to consumption credit”. Em: *Stochastic Models* 30(3).
- Gilde, V. e B. Sundt (1989). “On Bonus systems with credibility scales”. Em: *Scandinavian Actuarial Journal* 1989(1), pp. 13–22.
- Guerreiro, G.R. (2001). “Uma Abordagem Alternativa para Bonus Malus”. Tese de mestrado. Instituto Superior de Economia e Gestão.
- Guerreiro, G.R. e J.T. Mexia (2004). “An alternative approach to bonus malus”. Em: *Discussiones Mathematicae, Probability and Statistics* 24(2), pp. 197–213.

- Guerreiro, G.R. e J.T. Mexia (2008). “Stochastic vortices in periodically reclassified populations”. Em: *Discussiones Mathematicae, Probability and Statistics* 28(2), pp. 209–227.
- Guerreiro, G.R., J.T. Mexia e M.F. Miguens (2010). “A model for open populations subject to periodical re-classifications”. Em: *Journal of Statistical Theory and Practice* 4(2), pp. 303–321.
- Guerreiro, G.R., J.T. Mexia e M.F. Miguens (2012). “Stable Distributions for Open Populations Subject to Periodical Reclassifications”. Em: *Journal of Statistical Theory and Practice* 6(4).
- Guerreiro, G.R., J.T. Mexia e M.F. Miguens (2014). “STATISTICAL APPROACH FOR OPEN BONUS MALUS”. Em: *ASTIN Bulletin*, pp. 63–83.
- Lemaire, J. (1995). *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*. Vol. 19. Springer.
- Norberg, R. (1976). “A Credibility Theory for Automobile Bonus Systems”. Em: *Scandinavian Actuarial Journal* 1976(2), pp. 92–107.
- Oliveira, L. (1996). *Nova Enciclopédia Larousse (ROC-SIR)*. 3905^a ed. Vol. 20. 22 vols. Círculo de Leitores. 6397 pp.
- Silva, M. (2014). “Impacto do Sistema de Bonus Malus na probabilidade de ruína em tempo contínuo e finito”. Tese de mestrado. Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.
- Tan, C.I., J. Li, J.S.H. Li e U. Balasooriya (2015). “Optimal relativities and transition rules of a bonus–malus system”. Em: *Insurance: Mathematics and Economics* 61(C), pp. 255–263.
- van der Aalst, W.M.P. e M. Voorhoeve (2000). “Simulation HandBook”. Em: *BPM Center Report BPM00-04*, BPMcenter.org.



DISCRETIZAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE ESTRUTURA

Tabela A.1: Discretização da Distribuição de Estrutura

λ	u_{λ}^d	λ	u_{λ}^d	λ	u_{λ}^d	λ	u_{λ}^d
0,01	0,2763795	0,26	0,0042853	0,51	0,0002889	0,76	0,0000212
0,02	0,1028286	0,27	0,0038344	0,52	0,0002599	0,77	0,0000191
0,03	0,0820432	0,28	0,0034324	0,53	0,0002339	0,78	0,0000172
0,04	0,0679677	0,29	0,0030738	0,54	0,0002105	0,79	0,0000155
0,05	0,0574535	0,30	0,0027536	0,55	0,0001895	0,80	0,0000140
0,06	0,0491831	0,31	0,0024676	0,56	0,0001706	0,81	0,0000126
0,07	0,0424701	0,32	0,0022121	0,57	0,0001536	0,82	0,0000114
0,08	0,0369062	0,33	0,0019835	0,58	0,0001383	0,83	0,0000103
0,09	0,0322263	0,34	0,0017791	0,59	0,0001245	0,84	0,0000093
0,10	0,0282471	0,35	0,0015962	0,60	0,0001121	0,85	0,0000083
0,11	0,0248353	0,36	0,0014324	0,61	0,0001010	0,86	0,0000075
0,12	0,0218911	0,37	0,0012858	0,62	0,0000909	0,87	0,0000068
0,13	0,0193370	0,38	0,0011544	0,63	0,0000819	0,88	0,0000061
0,14	0,0171119	0,39	0,0010366	0,64	0,0000738	0,89	0,0000055
0,15	0,0151664	0,40	0,0009311	0,65	0,0000665	0,90	0,0000050
0,16	0,0134604	0,41	0,0008364	0,66	0,0000599	0,91	0,0000045
0,17	0,0119606	0,42	0,0007516	0,67	0,0000540	0,92	0,0000041
0,18	0,0106391	0,43	0,0006754	0,68	0,0000486	0,93	0,0000037
0,19	0,0094726	0,44	0,0006071	0,69	0,0000438	0,94	0,0000033
0,20	0,0084411	0,45	0,0005457	0,70	0,0000395	0,95	0,0000030
0,21	0,0075276	0,46	0,0004907	0,71	0,0000356	0,96	0,0000027
0,22	0,0067177	0,47	0,0004412	0,72	0,0000321	0,97	0,0000024
0,23	0,0059986	0,48	0,0003968	0,73	0,0000289	0,98	0,0000022
0,24	0,0053597	0,49	0,0003569	0,74	0,0000261	0,99	0,0000020
0,25	0,0047913	0,50	0,0003211	0,75	0,0000235	1,00	0,0000183

RESULTADOS DO MODELO DE SIMULAÇÃO (COM DISCRETIZAÇÃO)

B.1 Distribuição Limite da Carteira

Tabela B.1: Distribuição Limite da Carteira - modelo de Simulação (com discretização)

Classe	Simulação recorrendo à Discretização
1	0,679071
2	0,074993
3	0,087149
4	0,045210
5	0,044660
6	0,015764
7	0,016418
8	0,011535
9	0,010615
10	0,010833
11	0,001377
12	0,000945
13	0,000489
14	0,000309
15	0,000210
16	0,000127
17	0,000119

APÊNDICE B. RESULTADOS DO MODELO DE SIMULAÇÃO (COM DISCRETIZAÇÃO)

18	0,000057
19	0,000038
20	0,000081



RESULTADOS DO MODELO DE SIMULAÇÃO (SEM DISCRETIZAÇÃO)

C.1 Distribuição Limite da Carteira

Na Tabela C.1 apresentam-se os resultados obtidos para a distribuição limite obtida através do modelo de Simulação em que não se considera a discretização da distribuição de estrutura.

Tabela C.1: Distribuição Limite da Carteira - modelo de Simulação (sem discretização)

Classe	Simulação sem recorrer à Discretização
1	0,689106
2	0,073255
3	0,084227
4	0,044145
5	0,043428
6	0,015162
7	0,015761
8	0,011004
9	0,010276
10	0,010496
11	0,001195
12	0,000802
13	0,000402
14	0,000249

APÊNDICE C. RESULTADOS DO MODELO DE SIMULAÇÃO (SEM DISCRETIZAÇÃO)

15	0,000168
16	0,000100
17	0,000093
18	0,000043
19	0,000029
20	0,000058

Na Tabela C.2 apresenta-se a amplitude dos resultados obtidos para o modelo de Simulação aplicado aos pressupostos do modelo de Vórtices Estocásticos e para o modelo de Simulação em que não se discretiza a distribuição de estrutura.

Tabela C.2: Amplitude dos resultados obtidos para a Distribuição Limite da Carteira - modelo de Simulação

Classe	Simulação recorrendo à Discretização			Simulação sem recorrer à Discretização		
	$L\pi_{\infty}(j)$	$\pi_{\infty}(j)$	$U\pi_{\infty}(j)$	$L\pi_{\infty}(j)$	$\pi_{\infty}(j)$	$U\pi_{\infty}(j)$
1	0,678080	0,679071	0,679928	0,687609	0,689106	0,690414
2	0,074559	0,074993	0,075356	0,072505	0,073255	0,073887
3	0,086586	0,087149	0,087535	0,083494	0,084227	0,084853
4	0,044805	0,045210	0,045694	0,043621	0,044145	0,044659
5	0,044003	0,044660	0,045155	0,042873	0,043428	0,043898
6	0,015546	0,015764	0,015935	0,014754	0,015162	0,015500
7	0,016140	0,016418	0,016668	0,015388	0,015761	0,016098
8	0,011378	0,011535	0,011723	0,010702	0,011004	0,011246
9	0,010394	0,010615	0,010809	0,009976	0,010276	0,010516
10	0,010634	0,010833	0,011115	0,010221	0,010496	0,010718
11	0,001351	0,001377	0,001416	0,001095	0,001195	0,001285
12	0,000922	0,000945	0,000965	0,000735	0,000802	0,000893
13	0,000475	0,000489	0,000503	0,000354	0,000402	0,000469
14	0,000299	0,000309	0,000322	0,000207	0,000249	0,000300
15	0,000204	0,000210	0,000218	0,000136	0,000168	0,000205
16	0,000123	0,000127	0,000132	0,000078	0,000100	0,000123
17	0,000115	0,000119	0,000125	0,000071	0,000093	0,000124
18	0,000054	0,000057	0,000064	0,000026	0,000043	0,000060
19	0,000036	0,000038	0,000041	0,000014	0,000029	0,000049
20	0,000078	0,000081	0,000088	0,000031	0,000058	0,000076

$L\pi_{\infty}(j)$ e $U\pi_{\infty}(j)$ representam o limite inferior e superior obtidos para a distribuição limite da classe j , com $j = 1, 2, \dots, 20$, respetivamente.

C.2 Escala de Norberg

Na Tabela C.3 encontram-se os resultados obtidos para a escala ótima de Norberg considerando o modelo de Simulação em que não se discretiza a distribuição de estrutura.

Tabela C.3: Escala Ótima de Norberg - modelo de Simulação (sem discretização)

Classe	Simulação sem recorrer à Discretização
1	56,46
2	86,26
3	95,59
4	90,44
5	93,16
6	107,11
7	106,05
8	115,45
9	99,91
10	100,00
11	215,30
12	232,76
13	276,57
14	294,35
15	314,76
16	324,90
17	336,04
18	358,75
19	386,78
20	428,52

Na Tabela C.4 encontra-se representada a amplitude dos resultados obtidos para as Escalas de Norberg obtidas através de Simulação.

Tabela C.4: Amplitude dos resultados obtidos para a Escala de Norberg - Simulação

Classe	Simulação recorrendo à Discretização			Simulação sem recorrer à Discretização		
	$Lb_T(j)$	$b_T(j)$	$Ub_T(j)$	$Lb_T(j)$	$b_T(j)$	$Ub_T(j)$
1	54,37	54,64	55,03	54,85	56,46	58,48
2	82,05	82,50	83,10	83,75	86,26	88,75
3	91,06	91,59	92,41	93,10	95,59	99,25

APÊNDICE C. RESULTADOS DO MODELO DE SIMULAÇÃO (SEM DISCRETIZAÇÃO)

4	87,59	88,22	88,85	87,35	90,44	92,89
5	90,83	91,43	92,04	90,03	93,16	96,58
6	104,36	105,12	105,96	103,61	107,11	110,54
7	103,74	104,62	105,52	102,85	106,05	109,41
8	113,00	114,12	115,52	109,42	115,45	119,53
9	98,72	99,63	100,73	95,76	99,91	104,70
10	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
11	203,07	206,36	209,78	197,07	215,30	227,25
12	220,35	223,29	227,77	216,16	232,76	251,94
13	259,08	264,12	269,20	243,43	276,57	299,65
14	271,33	280,05	286,35	272,17	294,35	319,32
15	291,51	300,06	307,92	273,39	314,76	358,98
16	298,58	306,25	313,12	281,83	324,90	378,27
17	309,08	319,36	326,81	286,74	336,04	410,00
18	314,13	339,40	354,83	280,80	358,75	455,28
19	347,09	366,95	377,69	293,04	386,78	478,95
20	377,48	403,70	418,98	353,88	428,52	513,99

C.3 Escala de Borgan, Hoem e Norberg

Na Tabela C.5 encontram-se os resultados obtidos para a escala ótima de Borgan para o modelo de Simulação em que não se considera a discretização da distribuição de estrutura.

Tabela C.5: Escala Ótima de Borgan et al. - modelo de Simulação (sem discretização)

Classe	Simulação sem recorrer à Discretização
1	73,07
2	88,11
3	98,06
4	91,60
5	95,72
6	106,17
7	105,97
8	109,70
9	98,95
10	100,00
11	219,08

12	240,44
13	310,38
14	323,75
15	366,94
16	368,50
17	409,27
18	443,68
19	488,54
20	504,11

Na Tabela C.6 encontra-se representada a amplitude dos resultados obtidos para as Escalas de Borgan obtidas através de Simulação sem recorrer à discretização.

Tabela C.6: Amplitude dos resultados obtidos para a Escala de Borgan et al. - Simulação

Classe	Simulação recorrendo à Discretização			Simulação sem recorrer à Discretização		
	$Lb^B(j)$	$b^B(j)$	$Ub^B(j)$	$Lb^B(j)$	$b^B(j)$	$Ub^B(j)$
1	54,37	54,64	55,03	72,08	73,07	74,00
2	82,05	82,50	83,10	86,98	88,11	89,85
3	91,06	91,59	92,41	96,76	98,06	99,56
4	87,59	88,22	88,85	90,46	91,60	92,72
5	90,83	91,43	92,04	94,39	95,72	97,28
6	104,36	105,12	105,96	103,38	106,17	108,15
7	103,74	104,62	105,52	103,69	105,97	108,54
8	113,00	114,12	115,52	106,11	109,70	112,76
9	98,72	99,63	100,73	97,58	98,95	100,62
10	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
11	203,07	206,36	209,78	206,26	219,08	233,09
12	220,35	223,29	227,77	227,30	240,44	254,98
13	259,08	264,12	269,20	266,42	310,38	364,45
14	271,33	280,05	286,35	283,71	323,75	379,35
15	291,51	300,06	307,92	296,14	366,94	446,84
16	298,58	306,25	313,12	309,66	368,50	455,52
17	309,08	319,36	326,81	330,55	409,27	610,35
18	314,13	339,40	354,83	333,96	443,68	620,02
19	347,09	366,95	377,69	335,90	488,54	690,36
20	377,48	403,70	418,98	386,97	504,11	636,11

C.4 Escala de Gilde

Na Tabela C.7 encontram-se os resultados obtidos para a escala ótima de Gilde e Sundt.

Tabela C.7: Escala Ótima de Gilde e Sundt - modelo de Simulação (sem discretização)

Classe	Simulação sem recorrer à Discretização
1	60,87
2	65,22
3	69,57
4	73,92
5	78,26
6	82,61
7	86,96
8	91,31
9	95,65
10	100,00
11	104,35
12	108,69
13	113,04
14	117,39
15	121,74
16	126,08
17	130,43
18	134,78
19	139,13
20	143,47

Na Tabela C.8 encontra-se representada a amplitude dos resultados obtidos para as Escalas de Gilde e Sundt obtidas por Simulação sem recorrer à discretização.

Tabela C.8: Amplitude dos resultados obtidos para a Escala de Gilde e Sundt - Simulação

Classe	Simulação recorrendo à Discretização			Simulação sem recorrer à Discretização		
	$Lb_G(j)$	$b_G(j)$	$Ub_G(j)$	$Lb_G(j)$	$b_G(j)$	$Ub_G(j)$
1	61,05	61,28	61,46	59,99	60,87	61,60
2	65,38	65,58	65,74	64,44	65,22	65,86
3	69,70	69,88	70,02	68,88	69,57	70,13

4	74,03	74,18	74,31	73,33	73,92	74,40
5	78,36	78,49	78,59	77,77	78,26	78,66
6	82,69	82,79	82,87	82,22	82,61	82,93
7	87,02	87,09	87,15	86,66	86,96	87,20
8	91,34	91,39	91,44	91,11	91,31	91,47
9	95,67	95,70	95,72	95,55	95,65	95,73
10	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
11	104,28	104,30	104,33	104,27	104,35	104,45
12	108,56	108,61	108,66	108,53	108,69	108,89
13	112,85	112,91	112,98	112,80	113,04	113,34
14	117,13	117,21	117,31	117,07	117,39	117,78
15	121,41	121,51	121,64	121,34	121,74	122,23
16	125,69	125,82	125,97	125,60	126,08	126,67
17	129,98	130,12	130,30	129,87	130,43	131,12
18	134,26	134,42	134,62	134,14	134,78	135,56
19	138,54	138,72	138,95	138,40	139,13	140,01
20	142,82	143,03	143,28	142,67	143,47	144,45

C.5 Escala de Andrade e Silva

Na Tabela C.9 encontram-se os resultados obtidos para a escala ótima de Andrade e Silva.

Tabela C.9: Escala Ótima de Andrade e Silva - modelo de Simulação (sem discretização)

Classe	Simulação sem recorrer à Discretização
1	59,40
2	62,94
3	66,69
4	70,66
5	74,87
6	79,33
7	84,06
8	89,07
9	94,38
10	100,00
11	105,96
12	112,27

APÊNDICE C. RESULTADOS DO MODELO DE SIMULAÇÃO (SEM DISCRETIZAÇÃO)

13	118,96
14	126,05
15	133,56
16	141,52
17	149,95
18	158,89
19	168,36
20	178,39

Na tabela C.10 encontra-se representada a amplitude dos resultados obtidos para as Escalas de Andrade e Silva obtidas por Simulação.

Tabela C.10: Amplitude dos resultados obtidos para a Escala de Andrade e Silva - Simulação

Classe	Simulação recorrendo à Discretização			Simulação sem recorrer à Discretização		
	$Lb_A(j)$	$b_A(j)$	$Ub_A(j)$	$Lb_A(j)$	$b_A(j)$	$Ub_A(j)$
1	59,98	60,23	60,42	58,33	59,40	60,23
2	63,48	63,72	63,90	61,93	62,94	63,72
3	67,19	67,41	67,58	65,75	66,69	67,42
4	71,12	71,32	71,47	69,81	70,66	71,32
5	75,28	75,45	75,58	74,12	74,87	75,46
6	79,67	79,82	79,93	78,69	79,33	79,83
7	84,33	84,45	84,54	83,55	84,06	84,45
8	89,26	89,34	89,41	88,71	89,07	89,35
9	94,48	94,52	94,55	94,19	94,38	94,52
10	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
11	105,76	105,80	105,84	105,79	105,96	106,17
12	111,85	111,93	112,03	111,92	112,27	112,73
13	118,29	118,41	118,58	118,41	118,96	119,69
14	125,10	125,28	125,51	125,27	126,05	127,08
15	132,31	132,54	132,85	132,53	133,56	134,92
16	139,92	140,22	140,61	140,21	141,52	143,25
17	147,98	148,34	148,83	148,33	149,95	152,09
18	156,50	156,94	157,53	156,93	158,89	161,48
19	165,52	166,03	166,73	166,02	168,36	171,45
20	175,05	175,66	176,48	175,64	178,39	182,04

AMPLITUDES PARA A EVOLUÇÃO DO PRÉMIO TOTAL

Tabela D.1: Amplitudes obtidas para a Evolução do Prémio Total - Simulação

Ano	Simulação recorrendo à Discretização			Simulação sem recorrer à Discretização		
	LP.Tot.(j)	P.Tot.(j)	UP.Tot.(j)	LP.Tot.(j)	P.Tot.(j)	UP.Tot.(j)
1	890562,50	930532,12	962100,00	902325,00	934088,63	960975,00
2	2492548,9	2537152,1	2586669,3	2486412,5	2540766,8	2589512,5
3	4595157,2	4650716,2	4717798,7	4595512,5	4649889,0	4706175,0
4	7047644,2	7143958,4	7204497,8	7056775,0	7143480,5	7222575,0
5	9838729,5	9922731,5	10021910,5	9834787,5	9918800,1	10039337,5
6	12821500,4	12917922,1	13027255,7	12811950,0	12909509,6	13027337,5
7	15966942,7	16066653,5	16177750,2	15918087,5	16055290,8	16193037,5
8	19216629,3	19327159,2	19445706,3	19191850,0	19322475,0	19490475,0
9	22516278,3	22667610,5	22790061,7	22541087,5	22661886,0	22847112,5
10	25895701,3	26044392,0	26226736,5	25910262,5	26040251,5	26197287,5
11	29263762,3	29442966,5	29597994,7	29257512,5	29429098,4	29579250,0
12	32625913,5	32827067,1	32961868,1	32619675,0	32811348,8	32981812,5
13	35993855,0	36190944,8	36340351,9	36008762,5	36177988,0	36358112,5
14	39382724,5	39504451,5	39654832,0	39293525,0	39498306,4	39704762,5
15	42615660,4	42765640,2	42920289,7	42552287,5	42762662,8	42952212,5
16	45806284,7	45955272,4	46096222,9	45818737,5	45957869,8	46170400,0
17	48878820,2	49076317,3	49214661,1	48928875,0	49090427,6	49307062,5
18	51917055,7	52123338,7	52272178,6	51931300,0	52139538,0	52376525,0
19	54903325,3	55074183,4	55271891,5	54878062,5	55092781,0	55306525,0

APÊNDICE D. AMPLITUDES PARA A EVOLUÇÃO DO PRÊMIO TOTAL

20	57778013,6	57948527,9	58167341,4	57761725,0	57959524,5	58176462,5
21	60530108,2	60724423,1	60955741,4	60532525,0	60743998,0	61016512,5
22	63222393,8	63413215,2	63608127,9	63221425,0	63432195,4	63684075,0
23	65769745,5	66016424,1	66188292,1	65750025,0	66029376,4	66297962,5
24	68262430,7	68513145,4	68700521,1	68306837,5	68525466,4	68748525,0
25	70663582,8	70917375,9	71123303,5	70690600,0	70921828,0	71164550,0
26	73040949,4	73237804,6	73458620,0	73010825,0	73239612,1	73521075,0
27	75235949,2	75456274,7	75641323,0	75269300,0	75475918,8	75734012,5
28	77380503,1	77588814,8	77785277,1	77372225,0	77603075,1	77834175,0
29	79387266,0	79629680,7	79801485,6	79373887,5	79638485,0	79889462,5
30	81332391,4	81583830,3	81773608,2	81335275,0	81589688,8	81844087,5
31	83224064,5	83459910,1	83629661,0	83209137,5	83462871,0	83733325,0
32	85024616,3	85258057,2	85469137,8	84984600,0	85272681,5	85463325,0
33	86781896,1	86977661,6	87233411,5	86722700,0	86981451,6	87240787,5
34	88438736,6	88615917,2	88841431,2	88305650,0	88618575,6	88902237,5
35	89975349,0	90177595,0	90445096,4	89942150,0	90195522,6	90460450,0
36	91461610,3	91663680,2	91857376,3	91453550,0	91693076,1	91919337,5
37	92906100,1	93088102,4	93298228,8	92904962,5	93121759,1	93381062,5
38	94279339,6	94441376,4	94675488,3	94207037,5	94489933,1	94741450,0
39	95507136,4	95726196,8	95901185,6	95484612,5	95772611,9	96050175,0
40	96763200,5	96964861,7	97149509,8	96716562,5	97013108,0	97305125,0
41	97923885,5	98139228,8	98385118,7	97805362,5	98183272,1	98432337,5
42	99051192,2	99261450,7	99473351,2	98955825,0	99287385,9	99593900,0
43	100084626,8	100337597,4	100572759,7	100043025,0	100364636,5	100737312,5
44	101124043,6	101358428,1	101588512,3	101159525,0	101378937,0	101644162,5
45	102125376,9	102332792,3	102539026,6	102022887,5	102349866,6	102681950,0
46	102979879,8	103241969,6	103477490,2	102988812,5	103262857,3	103543237,5
47	103869019,8	104121751,6	104363186,2	103831450,0	104143758,5	104461000,0
48	104544187,6	104967059,7	105165806,8	104731975,0	104988041,5	105268925,0
49	105379545,0	105742285,2	105980134,3	105454887,5	105779270,3	106077650,0
50	106252129,9	106515006,8	106754625,6	106306937,5	106532772,0	106831850,0

AMPLITUDES OBTIDAS - MODELO DE ENTRADAS COM DISTRIBUIÇÃO GEOMÉTRICA

A Distribuição Limite

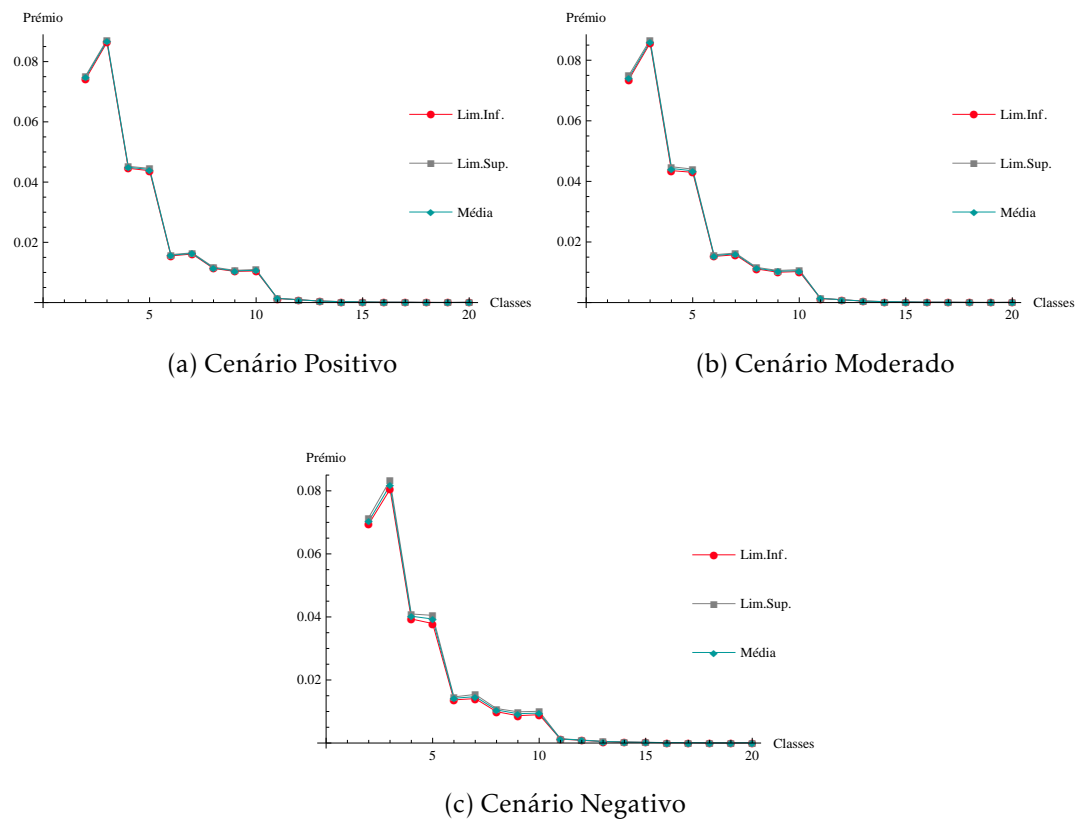


Figura E.1: Amplitude dos resultados obtidos para a Distribuição Limite

A Evolução do Prémio Total

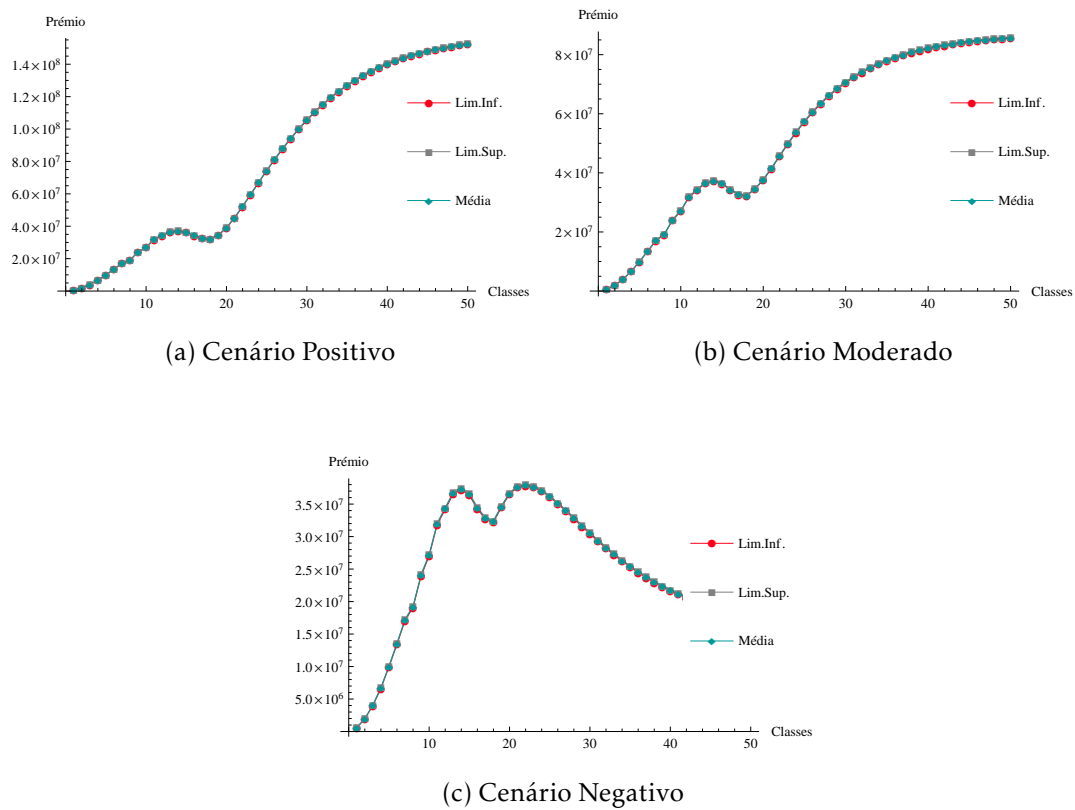


Figura E.2: Intervalos de Confiança para o Prémio Total ao longo de 50 anos

A Escala de Norberg

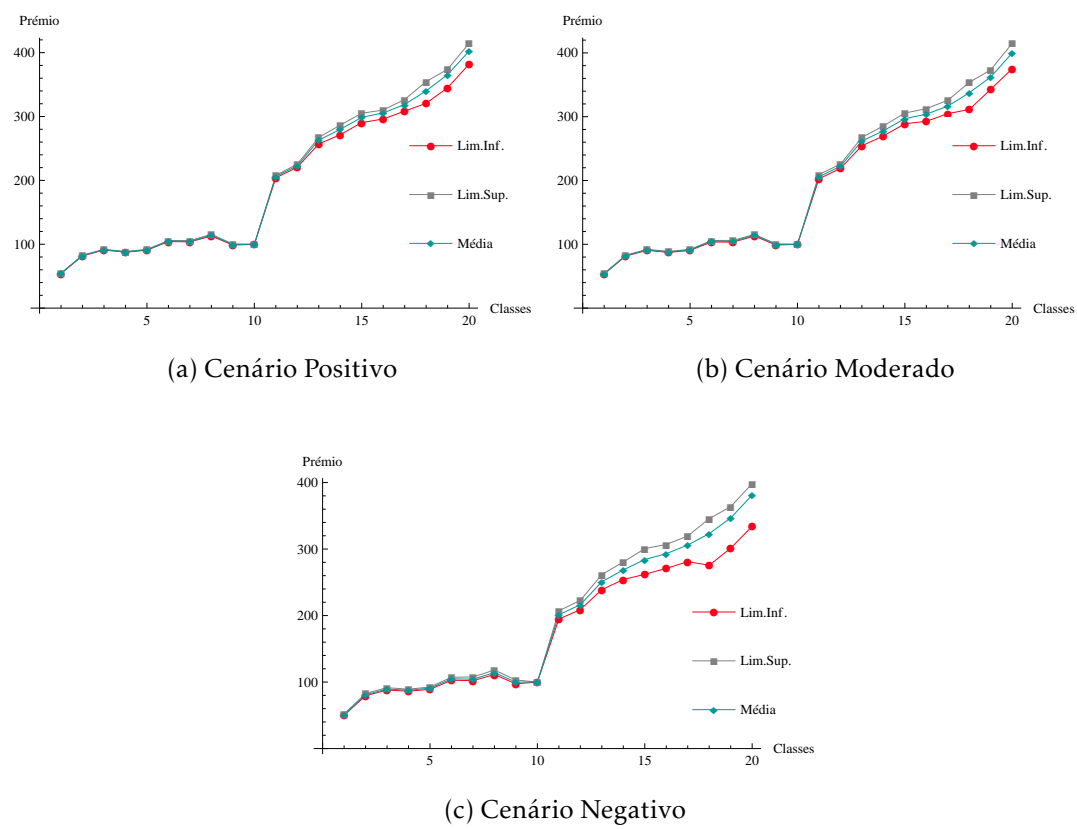


Figura E.3: Intervalos de Confiança para a Escala Ótima de Prêmios de Norberg

A Escala de Borgan, Hoem e Norberg

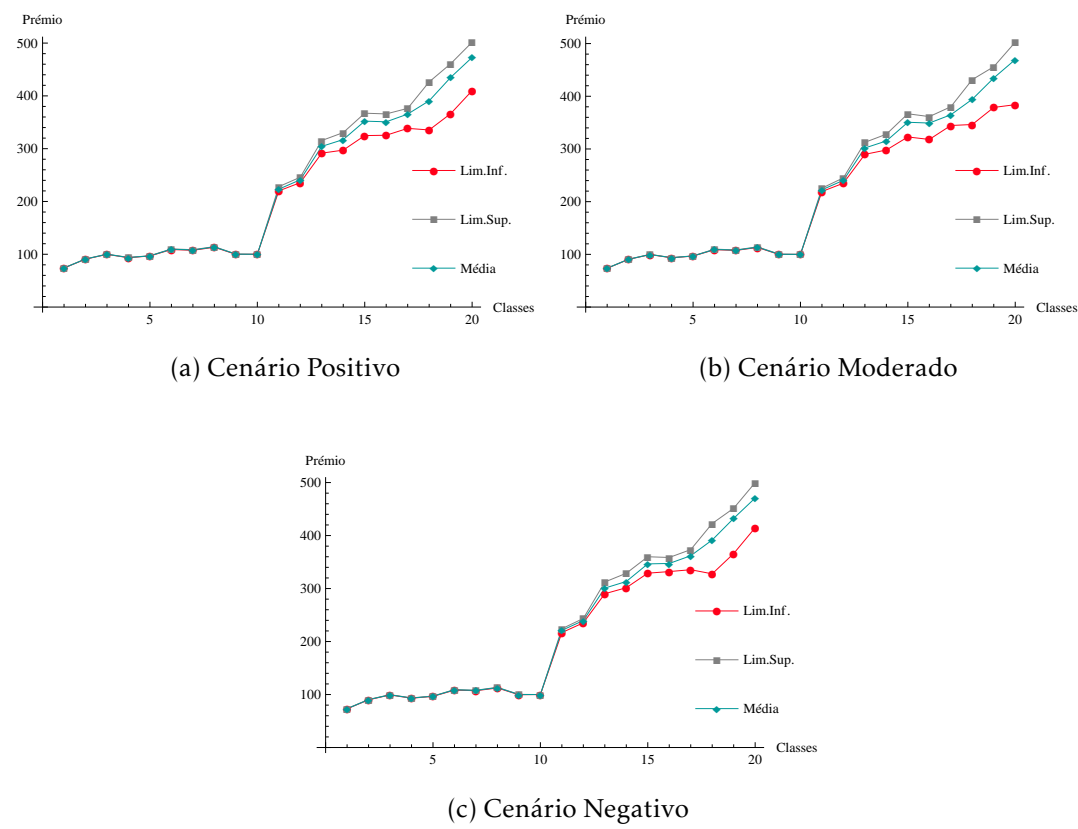
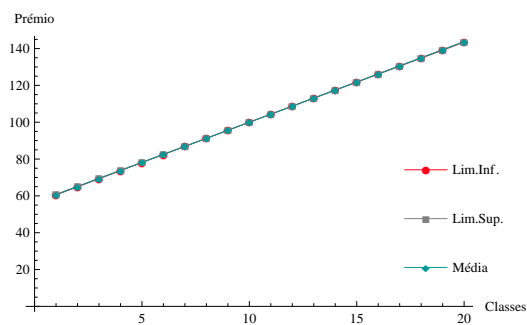
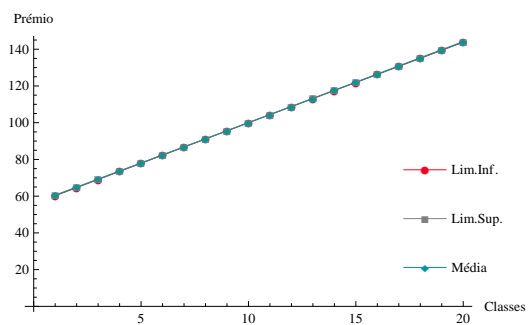


Figura E.4: Amplitude dos resultados obtidos para a Escala Ótima de Prêmios de Borgan, Hoem e Norberg

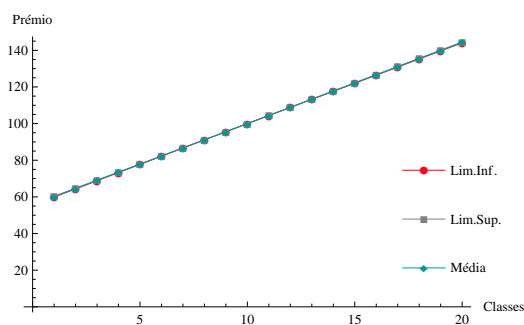
A Escala de Gilde e Sundt



(a) Cenário Positivo



(b) Cenário Moderado



(c) Cenário Negativo

Figura E.5: Amplitude dos resultados obtidos para a Escala Ótima de Prêmios de Gilde e Sundt

A Escala de Andrade e Silva

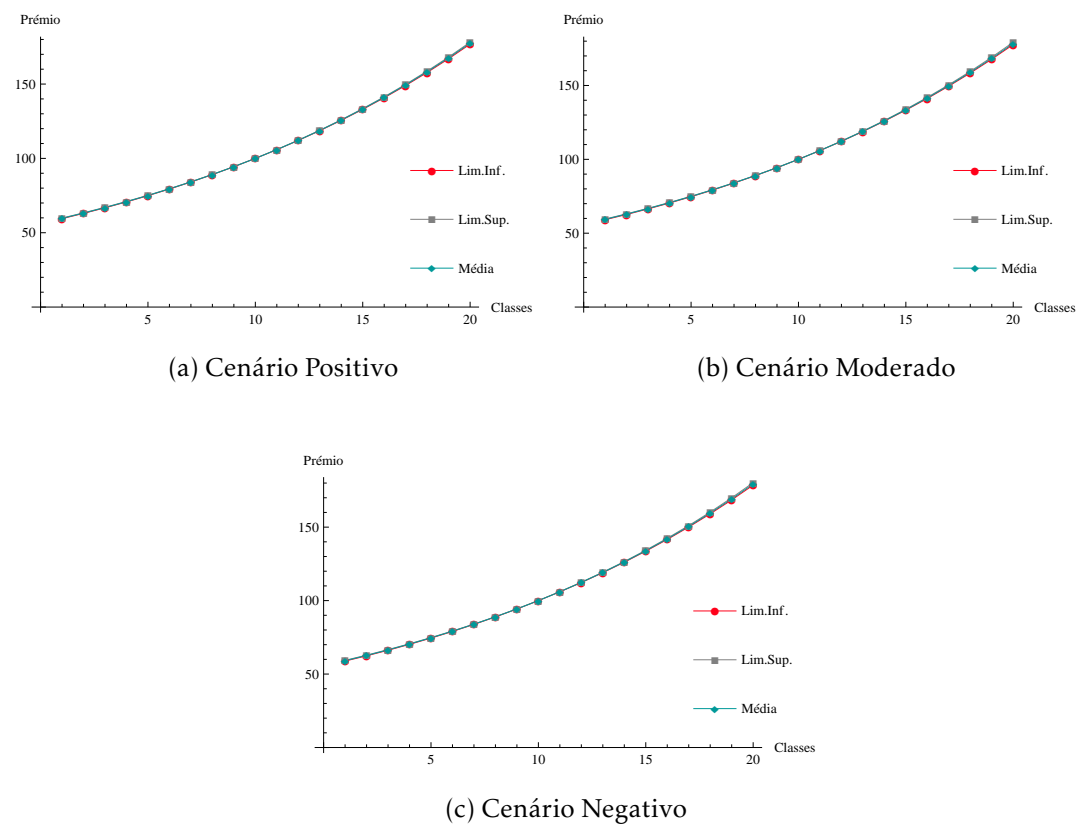


Figura E.6: Amplitude dos resultados obtidos para a Escala Ótima de Prémios de Andrade e Silva